AHMAD THOHIR

MATERI

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN OLIMPIADE MATEMATIKA

MA / SMA

YAYASAN SOSIAL ISLAM FUTUHIYAH

MA FUTUHIYAH

Jl. Raya Jeketro, Komplek Masjid An-Nur Jeketro Gubug Grobogan Telp. (0292) 5135603 Kode Pos 58 164

Bagi siapapun yang telah memiliki ebook ini, anda diperbolehkan mengcopy, menyebarluaskan dan atau menggandakan, tetapi anda tidak diperkenankan mengubah sebagian atau seluruh isinya tanpa seizin dari penulis.

Hormati dan hargailah hasil karya orang lain

Salam sukses untuk kita semua

SINGKATAN

AHSME	:	American Hight school Mathematics Examinations
AIME	:	American Invitational Mathematics Examinations
IMO	:	International Mathematical Olympiad
OMITS	:	Olimpiade Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember
OSK	:	Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Kabupaten/kota
OSN	:	Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Nasional
OSP	:	Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Provinsi
PUMaC	:	Princeton University Mathematics Competition

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah penulis ucapkan tak henti – hentinya kepada Allah Subhanahu Wata'ala karena dengan pertolongannya penulis dapat menorehkan dan mencorat – coretkan tinta di atas kertas ini dan menuangkan beberapa tulisan matematika yang sederhana ini.

Penulis berpandangan, selama ini para siswa khususnya di madrasah kami masih banyak yang menemui kesulitan dengan soal – soal kompetisi maupun olimpiade matematika tingkat SMA/MA tak terkecuali bapak dan ibu guru juga termasuk penulis sendiri. Berangkat dari hal inilah penulis mengumpulkan beberapa contoh soal baik lokal maupun internasional diserati ulasan materi untuk dapat digunakan bagi siswa – siswi dalam menghadapi even kompetisi matematika dan bapak atau ibu guru sebagai pendamping dalam pembinaan siswa – siswinya di sekolah atau madrasah masing – masing.

Penulis menyarankan kepada pemirsa untuk membaca dan menelaah *ebook 9 Tahun Penyelenggaraan OSN* yang berisi *Kumpulan Soal dan Solusi Olimpiade Matematika Indonesia* karya Eddy Hermanto beserta diktatnya dan buku *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika* karya Wono Setya Budhi.

Penulis merasa dengan kehadiran ebook ini tentunya masih banyak sekali kekurangan yang ada di dalamnya. Untuk itu penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca yang budiman sebagai bahan untuk perbaikan ebook ini.

Jeketro, Maret 2013

AHMAD THOHIR, S. Pd
Email : a_thohir1089@yahoo.com
www.ahmadthohir1089.wordpress.com

DAFTAR ISI

RUANG LINGKUP MATERI OLIMPIADE MATEMATIKA MA/SMA

NO	BAB/POKOK BAHASAN UTAMA	MATERI
1	**Aljabar**	a. Sistem Bilangan Real b. Bilangan Kompleks c. Ketaksamaan d. Nilai Mutlak e. Polinom f. Fungsi g. Barisan , Deret dan Notasi Sigma h. Persamaan dan Sistem Persamaan i. Aritmetika
2	**Teori Bilangan**	a. Sistem bilangan Bulat b. Keterbagian c. FPB(GCD), KPK(LCM), Relatif Prima(Coprim), dan Algoritma Euclid d. Konversi Bilangan dan Kongruensi e. Bilangan Prima f. Faktorisasi Prima g. Persamaan Bilangan Bulat h. Fungsi Tangga dan Ceiling
3	**Geometri**	a. Hubungan Antara Titik dan Garis b. Hubungan Antara Garis dan Garis c. Sudut d. Bangun-Bangun Bidang Datar e. Kesebangunan dan Kekongruenan f. Sifat-Sifat Segitiga : Garis Istimewa g. Dalil Menelaus h. Dalil Ceva i. Dalil Stewart j. Hubungan Lingkaran denganTitik k. Hubungan Lingkaran dengan Garis l. Hubungan Lingkaran dengan Segitiga m. Hubungan Lingkaran dengan Segiempat n. Hubungan Lingkaran dengan Lingkaran o. Garis-Garis yang Melalui Satu Titik(Konkuren), Titik-Titik yang Segaris p. Trigonometri(Perbandingan, Fungsi, Persamaan dan Identitas) q. Bangun Ruang Sederhana
4	**Kombinatorika**	a. Pinsip Pencacahan b. Permutasi c. Kombinasi

		d. Koefisien Binomial e. Peluang f. Prinsip Inklusi-Eksklusi g. Faktor Pembilang h. Pigeonhole Principle(Prinsip Sarang Merpati) i. Rekurensi

Notasi

$\in$: **Elemen/unsur dari**

$\notin$: **Bukan elemen/unsur dari**

$\mathbb{C}$: **Bilangan kompleks**

$\mathbb{N}$: **Bilangan Natural(asli) atau bilangan bulat positif**

$\mathbb{Q}$: **Bilangan rasional**

$\mathbb{R}$: **Bilangan real**

$\mathbb{Z}$: **Bilangan bulat**

$\cap$: **Irisan(interseksi)**

U : **Gabungan(Union)**

∞ : **Takterhingga(infinity),jumlah tak berakhir**

n! : **n faktorial**

MATERI OLIMPIADE MATEMATIKA MA / SMA

A.ALJABAR

1. Sistem Bilangan Real

1.1.Himpunan Bilangan Real($\mathbb{R}$)

Bilangan real $\mathbb{R}$, terdiri dari 2 bilangan yaitu bilangan rasional dan irasional

1.1.1.Bilangan Rasional

Bentuk Umum $\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

- 0,1,-1,-10,12 dan lain-lain
- Dilambangkan $\mathbb{Q}$
- Kadang berupa bilangan bentuk pecahan
- Bilangan desimal berbatas/terbatas
- Bilangan desimal berulang

Contoh A.1.

1)Hitunglah $1+\frac{1}{1}+\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{\frac{1}{3}}$

Jawab : $1+\frac{1}{1}+\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{\frac{1}{3}} = 1 + 1 + 4 + 9 = 15$

Contoh A.2.

1)Tentukan bilangan pecahan dari 0,4444…

Jawab : Misalkan

$x = 0{,}444 \ldots$, maka

$10x = 4{,}444 \ldots$

sehingga

$10x = 4{,}444 \ldots$

$x = 0{,}444 \ldots$

―――――――――――――――― -

$9x = 4$

$x = \frac{4}{9}$

2)Tentukan pecahan dari 1,34555…

Jawab : dengan cara yang sama seperti di atas

Misalkan

$10000x = 13455{,}555 \ldots$

$100x = 134{,}555 \ldots$

―――――――――――――――――――― -

$9900x = 13321$

$x = \frac{13321}{9900}$

1.1.1.1.**Bilangan Asli(Natural)**

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Dilambangkan $\mathbb{N}$
- Terdiri dari bilangan 3 bilangan utama, yaitu : Bilangan tunggal, bilangan basit(prima) dan bilangan majmuk(komposit)

1.1.1.2.**Bilangan Cacah**

- $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- 0 dan Bilangan asli
- Bilangan genap = $\{0, 2, 4, \ldots\}$
- Bilangan ganjil = $\{1, 3, 5, \ldots\}$

1.1.1.3.**Bilangan Bulat(Integer)**

- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$
- Bilangan sli, nol dan lawan dari bilangan asli

Contoh A.3

1)Hitunglah 222 x 999

Jawab :

222 x 999 = 222 x (1000-1) = 222000-222 = 221778

2)Hitunglah 2222222222 x 9999999999

Jawab :

2222222222 x 9999999999 = 2222222222 x (10000000000-1)

22222222220000000000-2222222222 = 22222222217777777778

1.1.2.**Bilangan Irasional(Bilangan Bentuk Akar)**

Bentuk Umum : $\left\{x \neq \frac{a}{b}, a, b \in Bilangan\ bulat, b \neq 0\right\}$

- Bilangan bentuk akar
- Bilangan desimal bersambung tapi tak berulang

Contoh A.4

1)Berikut ini mana yang bukan bentuk akar

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[4]{11}, \sqrt[4]{12}, \sqrt[4]{13}, \sqrt[4]{14}, \sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{16}, \sqrt[4]{17}$$

Jawab : yang bukan bentuk akar adalah $\sqrt{4} = |2|, \sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[4]{16} = |2|$

2)Tentukan nilai dari $A = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\ldots}}}}$

Jawab : Kuadratkan masing-masing ruas sehingga

$A^2 = x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\ldots}}}} \Rightarrow A^2 = xA \Rightarrow A^2 - xA = 0 \Rightarrow A(A - x) = 0$ sehingga $A = 0 \text{ atau } A = x$, dengan syarat $x \geq 0$

1.2.Operasi bilangan bentuk eksponen/pangkat, akar dan logaritma pada Bilangan real

1.2.1.**Bilangan bentuk eksponen/pangkat rasional**

Bentuk umum $a^p \begin{cases} a \text{ adalah bilangan pokok/dasar/basik} \\ p \text{ adalah eksponen/pangkat/derajat} \end{cases}$

- $a^p = \underbrace{a\,.\,a\,.\;a\,.\,a\,.\,a \ldots a}_{p\ buah\ faktor\ dari\ a}$
- $a^p\ x\ a^q = a^{p+q}$
- $a^p\ x\ b^p = (ab)^p$
- $a^p : a^q = a^{p-q}$
- $a^p : b^p = \left(\frac{a}{b}\right)^p = (a{:}\,b)^p$, $b \neq 0$
- $(a^p)^q = a^{pq}$
- $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$, $a \neq 0$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{b}{a}\right)^{-p}$,
- $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$, $a \neq 0$
- $(a+b)^1 = a + b$
- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$
- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3bc^2 + 3a^2c + 3b^2c + 6abc$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan $n \in$ bilangan ganjil
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan $n \in$ bilangan asli
- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k$ dengan $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab(a^{n-2} + b^{n-2})$
- $a^n + a^{-n} = (a + a^{-1})(a^{n-1} + a^{1-n}) - (a^{n-2} + a^{2-n})$
- $a^n + b^n + c^n = p(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) - q(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}) + r(a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3})$, dengan $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$, dan $r = abc$
- $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (a^3 + b^3)(a+b) - ab(a^2 + b^2)$
- $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2)$
- $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$
- $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$
- $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$
- $a^{f(x)} = 1$,dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ maka $f(x) = 0$
- $a^{f(x)} = a^p$,dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ maka $f(x) = p$
- $a^{f(x)} = a^{g(x)}$,dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ maka $f(x) = g(x)$

- $a^{f(x)} = b^{g(x)}$,dengan $a, b > 0$ dan $a \neq b$ serta $a \neq 1\ dan\ b \neq 1$,maka $f(x) = 0$
- $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$ maka aka nada 4 kemungkinan jawaban
   i. $f(x) = g(x)$
   ii. $f(x) = 1$
   iii. $f(x) = -1$, syarat $g(x)$dan $h(x)$ keduanya genap atau keduanya ganjil
   iv. $f(x) = 0$, syarat $g(x)$dan $h(x)$ keduanya positif
- $A\left(a^{f(x)}\right)^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + C = 0$ dapat diselesaikan dengan rumus ABC

1.2.2. **Bilangan bentuk akar**

- $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$
- $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$
- $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$ jika dan hanya jika a atau b tak negatif, sifat ini akan terus digunakan pada operasi bentuk akar selanjutnya
- $\sqrt[p]{a}\ x\ \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}$
- $m\sqrt[p]{a} + n\sqrt[p]{a} = (m+n)\sqrt[p]{a}$
- $m\sqrt[p]{a} - n\sqrt[p]{a} = (m-n)\sqrt[p]{a}$
- $m\sqrt[p]{a} + n\sqrt[p]{b} = m\sqrt[p]{a} + n\sqrt[p]{b}$ (tidak dapat dijumlah)
- $a + b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$
- $a - b = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$
- $\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{\left(\frac{a}{b}\right)}$, $b \neq 0$
- $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a} = a^{\frac{1}{pq}}$
- $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$, penyebut $\neq 0$
- $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$
- $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{c(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$
- $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{d})}{c-d}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} = \frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\ x\ \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\ x\ \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$
- $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, $a > b$
- $\sqrt{ab + \sqrt{ab + \sqrt{ab + \sqrt{\dots}}}} = b$, jika $a, b > 0$ dan $b - a = 1$

- $\sqrt{ab-\sqrt{ab-\sqrt{ab-\sqrt{\ldots}}}} = a$, jika $a, b > 0$ dan $b - a = 1$
- $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{\ldots}}}} = a$
- $\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+\cdots}}}}} = n+1 \quad ,dengan\ n \in N$
- $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}}}_{n\ akar} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

1.2.3.**Logaritma dan Logaritma Natural**

Bentuk umum

^{a}log b = c $\Leftrightarrow$ $a^c = b$

Dengan

- a adalah bilangan pokok basis, $a > 0$ dan $a \neq 1$
- b adalah numerus,yaitu bilangan yang dicari nilai logaritmanya, b > 0
- c adalah bilangan hasil pencarian nilai dari logaritma

Sifat-sifat logaritma :

- ^{a}log b + ^{a}log c = ^{a}log bc
- ^{a}log b - ^{a}log c = ^{a}log $\left(\frac{b}{c}\right)$
- ^{a}log $b^m = m.$ ^{a}log b
- ^{a}log b = (^{p}log b)/(^{p}log a) , dengan $a, p > 0$ dan $a, p \neq 1$
- ${}^{a}\log a = 1$
- ${}^{a}\log \frac{1}{a} = -1$
- ^{b}log b = 1
- ^{a}log a^m = m
- $a^{{}^{a}\log b} = b$
- ${}^{a}\log b = \frac{1}{{}^{b}\log_{a}}$

- ${}^{a}\log b . {}^{b}\log c . {}^{c}\log d . {}^{d}\log e = {}^{a}\log e$
- ${}^{a^n}\log a^m = \frac{m}{n}$
- ${}^{a^n}\log b^m = \frac{m}{n} {}^{a}\log b$
- log b = ^{10}log b
- ^{a}log 1 = 0 , dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$
- log 10 = 1
- log 100 = 2
- log 1000 = 3
- log $\frac{1}{10}$ = -1
- $\log \frac{1}{100}$ = -2
- log $\frac{1}{1000}$ = -3
- ^{a}log $f(x)$ = ^{a}log $g(x)$ maka $f(x) = g(x)$
- log x = 0,4343 ln x (ln = logaritma natural)
- ln x = 2,303 log x

Sifat ln sama dengan sifat logaritma untuk operasinya

Contoh A.5.

1)Tentukan nilai dari $\frac{2^5-2^7}{2^2}$

Jawab :

$$\frac{2^5-2^7}{2^2} = \frac{2^5-2^{5+2}}{2^2} = \frac{2^5(1-2^2)}{2^2} = 2^{5-2}(1-4) = 2^3.(-3) = 8.(-3) = -24$$

Kita sebenarnya juga langsung dapat mengerjakan, tapi di sini kita tekankan untuk aturan pangkatnya

2)Tentukan nilai $x\ untuk\ \frac{1}{\left(\left(\frac{2}{7}\right)^{2013}\right)^2} = \left(\frac{49}{4}\right)^x$

Jawab :

Perhatikan bahwa $\frac{1}{\left(\left(\frac{2}{7}\right)^{2013}\right)^2} = \left(\frac{49}{4}\right)^x \Longrightarrow \frac{1}{\left(\left(\frac{2}{7}\right)^{2013}\right)^2} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-2x} \Longrightarrow 1 = \left(\frac{2}{7}\right)^{4026}.\left(\frac{2}{7}\right)^{-2x}$

$$\Longrightarrow 1 = \left(\frac{2}{7}\right)^{4026-2x} \Longrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^0 = \left(\frac{2}{7}\right)^{4026-2x} \Longrightarrow 4026 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 2013$$

3) (Mat Das-UM UGM 2008) Jika

$$\frac{4}{5}(2^{3x-1})+\frac{8^x}{10}=2\,,$$

tentukan nilai x

Jawab :

$$\frac{4}{5}(2^{3x-1})+\frac{8^x}{10}=2 \Leftrightarrow \frac{8}{10}\left(\frac{2^{3x}}{2}\right)+\frac{2^{3x}}{10}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2^{3x})=2 \Leftrightarrow 2^{3x}=4=2^2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

Jadi, nilai $x=\frac{2}{3}$

4)Rasionalkan lah

(a) $\frac{1}{\sqrt{2013}}$
(b) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2013}}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$
(d) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}$
(e) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}$
(f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$
(g) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$
(h) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$

Jawab :

(a) $\frac{1}{\sqrt{2013}}=\frac{1}{\sqrt{2013}}\text{ x }\frac{\sqrt{2013}}{\sqrt{2013}}=\frac{1}{2013}\sqrt{2013}$
(b) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2013}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2013}}\ x\ \frac{\sqrt{2013}}{\sqrt{2013}}=\frac{3\sqrt{671}}{2\sqrt{2013}}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}\ x\ \frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{5-7}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$
(d) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}\ x\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$
(e) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}\ x\ \frac{\sqrt{2012}-\sqrt{2013}}{\sqrt{2012}-\sqrt{2013}}=\frac{\sqrt{4024}-\sqrt{4026}+\sqrt{6036}-\sqrt{6039}}{2012-2013}=-2\sqrt{1006}+\sqrt{4026}-\sqrt{6036}+3\sqrt{671}$

(f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}\ x\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{14}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{14}}{3+2\sqrt{15}+5-7} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{14}}{1-2\sqrt{15}} =$
$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{14}}{1-2\sqrt{15}}\ x\ \frac{1+2\sqrt{15}}{1+2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{14}+2\sqrt{90}+2\sqrt{150}-2\sqrt{210}}{1-60} = -\frac{1}{63}\big(\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{14}+$
$6\sqrt{10}+10\sqrt{6}-2\sqrt{210}\,\big) = -\frac{1}{63}\big(11\sqrt{6}+7\sqrt{10}-\sqrt{14}-2\sqrt{210}\big)$

(g) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}\ x\ \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{2-3} = -\big(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\big)$

(h) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\ x\ \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2} = \frac{1}{2}\big(\sqrt{3}\sqrt[3]{4}\big)$

5)Jika m dan n bilangan asli sehingga

$\sqrt{7+\sqrt{48}} = \sqrt{m}+\sqrt{n}$, maka nilai dari m^2+n^2 =…

Jawab :

$$\sqrt{7+\sqrt{48}} = \sqrt{7+\sqrt{4.12}} = \sqrt{4+3+2\sqrt{3.4}} = \sqrt{4}+\sqrt{3}$$

sehingga $m=4$ dan $n=3$. Jadi $m^2+n^2 = 4^2+3^2 = 16+9 = 25$

6)Tentukan nilai dari $\sqrt{7+\sqrt{33}}-\sqrt{7-\sqrt{33}}$

Jawab :

Misalkan $x = \sqrt{7+\sqrt{33}}-\sqrt{7-\sqrt{33}}$,kuadratkan masing-masing ruas sehingga

$x^2 = \left(\sqrt{7+\sqrt{33}}-\sqrt{7-\sqrt{33}}\right)^2 = 7+\sqrt{33}+7-\sqrt{33}-2\sqrt{49-33} = 14-2\sqrt{14}$

$x^2 = 14-2.4 = 14-8 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$

7)Diketahui $\sqrt{7x^2-2x+432}+\sqrt{7x^2-2x-423} = 285$, maka nilai untuk $\sqrt{7x^2-2x+432}-\sqrt{7x^2-2x-423}$ adalah…

Jawab :

Misalkan

$\sqrt{y} = \sqrt{7x^2-2x+432}$ dan

$\sqrt{x} = \sqrt{7x^2-2x-423}$, maka

$\sqrt{y}+\sqrt{x} = 285 \Rightarrow \sqrt{y} = 285-\sqrt{x}$ (kuadratkan masing-masing ruas)

Sehingga didapat

$y = 81225 - 570\sqrt{x} + x$ atau

$\Leftrightarrow (7x^2 - 2x + 432) = 81225 - 570\sqrt{x} + (7x^2 - 2x - 423)$

$\Leftrightarrow 432 = 81225 - 570\sqrt{x} - 423$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{80370}{570} = 141 \ \Rightarrow \sqrt{y} = 144$

Jadi, $\sqrt{7x^2 - 2x + 432} - \sqrt{7x^2 - 2x - 423} = \sqrt{y} - \sqrt{x} = 144 - 141 = 3$

8)Diketahui ${}^{7}\log 2 = a$ dan ${}^{2}\log 3 = b$, maka nilai ${}^{98}\log 6 = ...$

Jawab : Dari soal diketahui

${}^{7}\log 2 = a$, dan

${}^{2}\log 3 = b$.

Sehingga untuk

$${}^{98}\log 6 = \frac{{}^{3}\log 6}{{}^{3}\log 98} = \frac{{}^{2}\log 2.3}{{}^{2}\log 2.7.7} = \frac{{}^{2}\log 2 + {}^{2}\log 3}{{}^{2}\log 2 + {}^{2}\log 7 + {}^{2}\log 7} = \frac{1+b}{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} = \frac{1+b}{\frac{a+2}{a}} = \frac{a(1+b)}{2+a}$$

9)(UM IKIP PGRI 2010) Jika diketahui

${}^{2}\log {}^{2}\log x = {}^{2}\log\left(6 - {}^{2}\log x\right) + 1$, maka nilai x adalah...

Jawab :

Perhatikan ${}^{2}\log {}^{2}\log x = {}^{2}\log\left(6 - {}^{2}\log x\right) + 1 \Leftrightarrow {}^{2}\log {}^{2}\log x = {}^{2}\log\left(6 - {}^{2}\log x\right) + {}^{2}\log 2$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log {}^{2}\log x = {}^{2}\log 2.\left(6 - {}^{2}\log x\right) \Leftrightarrow {}^{2}\log x = 2\left(6 - {}^{2}\log x\right) \Leftrightarrow {}^{2}\log x = \left(12 - 2\,{}^{2}\log x\right)$

$\Leftrightarrow 3\,{}^{2}\log x = 12 \Leftrightarrow {}^{2}\log x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$

Jadi, nilai $x = 16$

10)(Olimpiade Sains Porsema NU Th 2012)

Nilai x yang memenuhi jika

$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}-\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{-x}=\frac{3}{2}$ adalah ...

(a) ${}^{\sqrt{2}+1}\log 2$
(b) ${}^{3+\sqrt{2}}\log 2$
(c) ${}^{\sqrt{2}+1}\log 3$
(d) ${}^{\sqrt{2}-1}\log 2$
(e) ${}^{\sqrt{2}+2}\log 3$

Jawab :

Misalkan $p=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ maka $p^{x}-p^{-x}=\frac{3}{2}\Longrightarrow p^{x}-\frac{1}{p^{x}}=\frac{3}{2}$. Sehingga

$p^{x}-\frac{1}{p^{x}}-\frac{3}{2}=0$ (masing-masing ruas dikalikan dengan $2p^{x}$)

$2p^{2x}-3p^{x}-2=0\Longrightarrow (2p^{x}+1)(p^{x}-2)=0\Longrightarrow p^{x}=-\frac{1}{2}$ atau $p^{x}=2$

Jelas yang memenuhi adalah $p^{x}=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}=2$, sehingga

Untuk mencari x , gunakan logaritma

$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}=2\Longrightarrow x={}^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\log 2\Rightarrow x={}^{\sqrt{\left(2+1+2\sqrt{2.1}\right)^{2}}}\log 2\Rightarrow x={}^{\sqrt{2}+1}\log 2$

Jadi, jawab di atas adalah (a)

11)(Mat Das-UM UGM 2008) Bentuk sederhan dari

$$\frac{\left(\sqrt[6]{x^{2}}\right)\left(\sqrt[3]{x^{2}\sqrt{x+1}}\right)}{x\sqrt[6]{x+1}}$$

Jawab :

Perhatikan

$$\frac{\left(\sqrt[6]{x^{2}}\right)\left(\sqrt[3]{x^{2}\sqrt{x+1}}\right)}{x\sqrt[6]{x+1}}=\frac{\left(\sqrt[6]{x^{2}}\right)\left(\sqrt[6]{x^{4}(x+1)}\right)}{\sqrt[6]{x^{6}(x+1)}}=\frac{\sqrt[6]{x^{6}(x+1)}}{\sqrt[6]{x^{6}(x+1)}}=1$$

Jadi, $\frac{\left(\sqrt[6]{x^{2}}\right)\left(\sqrt[3]{x^{2}\sqrt{x+1}}\right)}{x\sqrt[6]{x+1}}=1$

12)Jika diketahui $^{7}\log\frac{1}{x}={}^{x}\log\frac{1}{y}={}^{y}\log\frac{1}{7}$, maka nilai $3x-2y$ adalah…

Jawab :

Perhatikan bahwa $^{7}\log\frac{1}{x}={}^{x}\log\frac{1}{y}={}^{y}\log\frac{1}{7}$

Melihat bentuk persamaannya, dapat langsung kita tebak bahwa $x=y=7$.

Sehingga nilai untuk $3x-2y=7(3)-7(2)=21-14=7$

Jadi nilai $3x-2y=7$.

13) (OSN 2002)Buktikan untuk sebarang bilangan bulat $n>1$, n^4-n^2 habis dibagi oleh 12

Jawab :

Perhatikan bahwa

$n^4-n^2=n^2(n^2-1)=n.n.(n-1)(n+1)=(n-2+2)(n-1)n(n+1)$

$n^4-n^2=(n-2)(n-1)n(n+1)+2(n-1)n(n+1)$

Karena $(n-2)(n-1)n(n+1)$ adalah 4 bilangan berurutan maka habis dibagi $4!$ dan $(n-1)n(n+1)$ adalah 3 bilangan berurutan juga akan habis dibagi oleh $3!$

Jadi terbukti bahwa untuk sebarang bilangan bulat $n>1$, n^4-n^2 habis dibagi oleh 12

14)(AIME 1983)Diketahui w dan z adalah bilangan kompleks yang memenuhi $w^2+y^2=$ 7 dan $w^3+z^3=10$, maka nilai terbesar untuk $w+z$ adalah…

Jawab :

Dari soal

$$w^2+y^2=(w+z)^2-2wz=7\ \dots\dots\dots\dots 1)$$

$$w^3+z^3=(w+z)^3-3wz(w+z)=10\ \dots\dots\dots..2)$$

Dari persamaan 1) diperoleh $wz=\frac{(w+z)^2-7}{2}\dots\dots\dots\dots..3)$

Persamaan 3) disubstitusikan ke 2), sehingga diperoleh

$$(w+z)^3-3\left(\frac{(w+z)^2-7}{2}\right)(w+z)=10$$

$$(w+z)^3-\frac{3}{2}\left((w+z)^3-7(w+z)\right)=10$$

$$2(w+z)^3-3(w+z)^3+21(w+z)-20=0$$

$$(w+z)^3-21(w+z)+20=0$$

Bentuk trinomial, karena pangkat tertingginya 3, dengan variabel $(w+z)$, lihat teorema faktor maka kita akan mendapatkan

$$(w+z-1)(w+z-4)(w+z+5)=0\begin{cases} w+z=1\ atau \\ w+z=4\ atau \\ w+z=-5 \end{cases}$$

Dari sini jelas nilai maksimum $w+z$ adalah 4

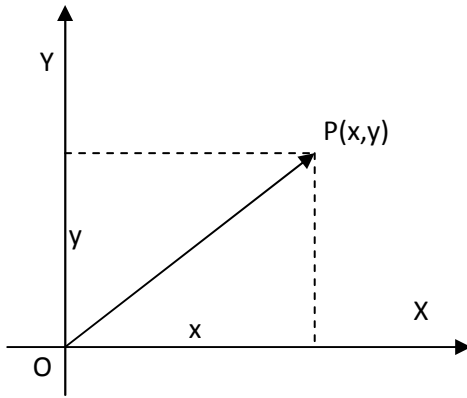
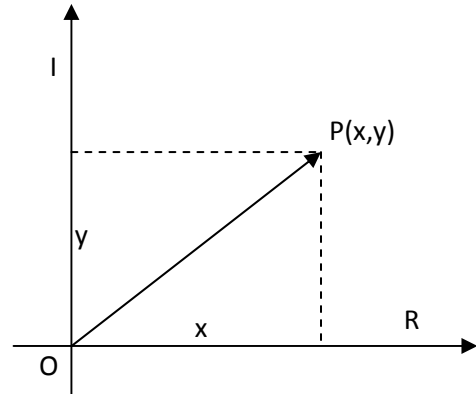
2.Bilangan Kompleks

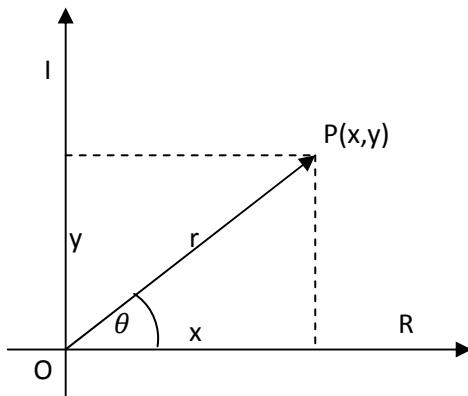
2.1.**Pengertian**

- $\mathbb{C}=\{z=a+bi|a,\mathrm{b}\ \in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$
- Dilambangkan dengan $\mathbb{C}$
- Jika akar-akar persamaan kuadrat $ax^2+bx+c=0$ adalah $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ jika $b\neq 0$ dan $b^2-4ac<0$, maka akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah bilangan-bilangan kompleks
- $i=\sqrt{-1}\Longrightarrow i^2=-1$
- Bentuk baku dari $\sqrt{-a}=i\sqrt{a}$
- Jika $n\in\mathbb{N}$, maka
    - a) $i^{4n}=+1$
    - b) $i^{4n-1}=i^{4n+3}=-i$
    - c) $i^{4n-2}=i^{4n+2}=-1$
    - d) $i^{4n-3}=i^{4n+1}=+i$
- a adalah bagian nyata dari z sedang b adalah bagian khayal dari
    - a) $a=Re(z)=Re(a+bi)$
    - b) $b=Im(z)=Im(a+bi)$
- Jika $b=0$, maka z adalah bilangan nyata
- Bilangan kompleks = (bagian nyata) + (bagian khayal) i.
- Bidang gambar untuk bilangan kompleks adalah *bidang argand* (diambil dari nama penemunya yaitu , **Jean Robert Argand**)

2.2.**Diagram bilangan kompleks**

Penyajian bilangan kompleks $z = x + yi$ dalam bentuk pasangan terurut (x, y) secara geometri adalah

Perhatikan 2 gambar berikut:

Titik P(x,y) pada bidang kartesius

Titik P(x,y) pada bidang argand

2.3.**Bentuk polar bilangan kompleks**

- Gambar di atas adalah vektor argand yang diwakili garis berarak $\overrightarrow{OP}$
- Panjang vektor argand adalah r, dan untuk r selanjutnya disebut nilai mutlak atau modulus
- Sudut yang dibentuk oleh sumbu R adalah θ dan sudut ini dinamakan *argumen* atau *amplitude*
- Bilangan kompleks dengan bentuk $z = x + yi$ disebut **bentuk rektanguler**
- Nilai mutlak r pada bilangan komplek $z = x + yi$ adalah $r = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$
    a) $x = r\cos\theta$
    b) $y = r\sin\theta$
- Argumen diperoleh dengan kaitan $\tan\theta = \frac{y}{x}$
- Sehingga **bentuk polar** dari $z = x + yi$ adalah $z = r(\cos\theta + i\ sin\ \theta)$

Sifat tambahan

- Formula **Euler**
  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, untuk setiap $\theta \in \mathbb{R}$
- Teorema **De Moivre**
  Jika $z = r(\cos\theta + i\ sin\ \theta)$ dan $n \in \mathbb{Q}$, maka
  $z^n = \{r(\cos\theta + i\ sin\ \theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\ sin\ n\theta)$
- Akar-akar bilangan kompleks
  Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan z adalah suatu bilangan kompleks, maka terdapat akar ke-n dari z yang masing-masing berbeda dan didefinikan dengan
  $$z_k = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\theta + k.360^0}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + k.360^0}{n}\right)\right\}$$
  untuk $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

2.4.**Operasi Pada Bilangan Kompleks**

Jika $z = a + bi$ dan $w = c + di$ adalah 2 bilangan kompleks, maka

- Keduanya dianggap sama jika dan hanya jika keduanya memiliki bagian nyata dan bagian khayal yang sama
- Operasi penjumlahan $z + w = (a + c) + (b + d)i$
- Operasi pengurangan $z - w = -(w - z)$
- Operasi perkalian $z.w = a.c + a.d.i + b.c.i + b.d.i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- Operasi Pembagian $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}.\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$
- Sekawan(konjugat) z adalah $\bar{z}$, dimana $\bar{z} = a - bi$
- $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$, dan $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- Nilai mutlak(absolute/magnitudo) adalah $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z.\bar{z}}$
- Untuk sekawan z juga berlaku $|\bar{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
- Berlaku pula ketaksamaan segitiga , yaitu $|z + w| \leq |z| + |w|$

Contoh A.6

1)Tentukan bagian real dan bagian imajiner dari bilangan-bilangan kompleks berikut

(a) $z_1 = 2011 - 3i$
(b) $z_2 = \sqrt{2012} + 5i$
(c) $z_3 = 2013$
(d) $z_4 = 2014 - \sqrt{3}i$

Jawab :

(a) Re (z_1) = 2011 ; Im (z_1) = -3
(b) Re (z_2) = $\sqrt{2012}$;Im (z_2) = 5
(c) Re (z_3) = 2013 ; Im (z_3) = 0
(d) Re (z_4) = 2014 ; Im (z_4) = $-\sqrt{3}$

2)Sederhanakan bentuk bilangan berikut

(a) $i^{2010} - i^{2011} + i^{2012} - i^{2013}$
(b) $2i^{99} - 99i^2$

Jawab :

(a) $i^{2008+2} - i^{2008+3} + i^{2012} - i^{2012+1} = (-1) - (-i) + (1) - (i) = -1 + i + 1 - i = 0$
(b) $2i^{96+3} - 99i^2 = 2(-i) - 99(-1) = 99 - 2i$

3)Nyatakan soal no 1) sebagai pasangan bilangan real terurut

Jawab :

(a) Dapat disajikan sebagai (2011,-3)
(b) Dapat disajikan sebagai ($\sqrt{2012}$, 5)
(c) Dapat disajikan sebagai (2013, 0)
(d) Dapat disajikan sebagai (2014, $-\sqrt{3}$)

4)Bilangan kompleks $-2\sqrt{3} - 2i$ bila dinyatakan dalam bentuk polar adalah

Jawab :

Bentuk polar suatu bilangan kompleks adalah $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Modulus/harga mutlak $r = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$.

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$ (adalah dikuadran III)

$\tan\theta = \tan(180^0 + 60^0) = \tan 240^0$

Sehingga bentuk polarnya adalah $z = 4(\cos 240^0 + i\sin 240^0)$

5)Nyatakan bilangan kompleks $z = 10(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$ dalam bentuk rektangular

Jawab :

$$x = r\cos\theta = 10\cos 30^0 = 10.\frac{1}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$y = r\sin\theta = 10\sin 30^0 = 10.\frac{1}{2} = 5$$

Sehingga bentuk rektangularnya adalah $z = x + yi = 5\sqrt{3} + 5i$

6) Jika $z = 1 + 3i$ dan $w = 2 - 3i$ tentukan

(a) $w + z$
(b) $w - z$
(c) $2w - 3z$
(d) $z.w$
(e) $\frac{w}{z}$

Jawab :

(a) $w + z = 1 + 3i + 2 - 3i = 3$
(b) $w - z = 1 + 3i - (2 - 3i) = 1 + 3i - 2 + 3i = -1 + 6i$
(c) $2w - 3z = 2(2 - 3i) - 3(1 + 3i) = 4 - 6i - 3 - 9i = 1 - 15i$
(d) $zw = (1 + 3i)(2 - 3i) = \big(1.2 - 3.(-3)\big) + (2.(-3) + 3.2)i = 11$
(e) $\frac{w}{z} = \frac{2-3i}{1+3i} = \frac{2-3i}{1+3i}.\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{(2-9)+(-6-3)i}{1+9} = \frac{1}{10}(-7 - 9i)$

7)Tunjukkan bahwa untuk $n = 2$ dan $n = 3$ teorema De Moivre berlaku,yaitu

(a) $\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$
(b) $\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

Jawab :

(a) Untuk $n = 2$, maka
$\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)^2 = r^2\big((\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\big)$
$= r^2\big((cos^2\theta - sin^2\theta) + (\sin\theta.\cos\theta + \sin\theta.\cos\theta)i\big)$
$= r^2(\cos 2\theta + (2\sin\theta.\cos\theta)i)$
$= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$
(b) Untuk $n = 3$, maka
$\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)^3 = \big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)^2.\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)$
$= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta).\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)$
$= r^3\big((\cos 2\theta.\cos\theta - \sin 2\theta.\sin\theta) + (\sin 2\theta.\cos\theta + \cos 2\theta.\sin\theta)i\big)$
$= r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

8) Dengan menggunakan teorema De Moivre hitunglah $\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}$ dan nyatakan hasilnya dalam bentuk rektangular

Jawab :

Bentuk polar dari $\left(\sqrt{3}+i\right)$ adalah $2(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$

9)Tentukan bilangan-bilangan z yang memenuhi persamaan $z^2 = \left(1+\sqrt{3}i\right)$

Jawab :

Bentuk polar dari $z^2 = \left(1+\sqrt{3}i\right)$ adalah $2(\cos 60^0 + i\sin 60^0)$, maka

$$z^2 = 2(\cos 60^0 + i\sin 60^0)$$

Sehingga $z_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{60^0+k.360^0}{2}\right) + i\sin\left(\frac{60^0+k.360^0}{2}\right)\right)$

Untuk $k = 0$, maka kita akan memperoleh

$z_0 = \sqrt{2}(\cos 30^0 + i\sin 30^0) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{6} + i\ \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Untuk $k = 1$, maka diperoleh

$z_1 = \sqrt{2}(\cos 210^0 + i\sin 210^0) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{6} - i\ \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Karena $n = 2$, maka nilai k yang diambil adalah 0 dan 1

3.Ketaksamaan

3.1.Jika $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{dan}\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$, maka

- akan memenuhi sifat ketaksamaan di antara $a < b$, $a = b$, atau $a > b$
- Jika $a < b$ dan c adalah bilangan real positif maka $ac < bc$, dan jika c adalah real negatif maka $ac > bc$.
- Jika $a < b$ dan c adalah bilangan real positif maka $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, dan jika c adalah real negatif maka $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
- Jika $a \in \mathbb{R}$ maka $a^2 \geq 0$
- Jika berlaku $a < b < c$ maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

Contoh A.7

1)Agar supaya $\log(8 + 2x - x^2)$ dapat dihitung, haruslah

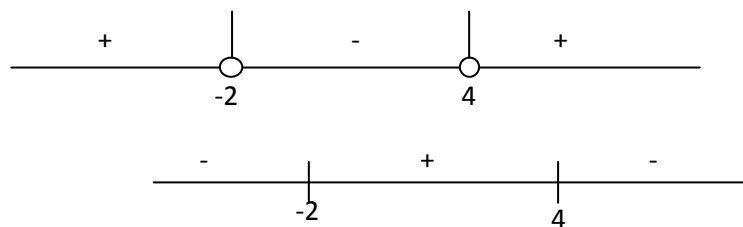
Jawab :

Syarat Numerus adalah $8 + 2x - x^2 > 0$

$\Longrightarrow -8 - 2x + x^2 < 0$ (masing-masing ruas dikalikan -1)

$\Longrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\Longrightarrow (x - 4)(x + 2) < 0$

Sehingga $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Jadi , $-2 < x < 4$

2) Penyelesaian untuk $\frac{2x-2013}{x-1} \leq 1$

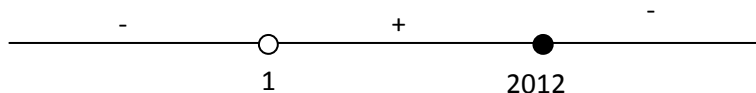
Jawab :

Langkah penting yang paling mendasar adalah kita tidak diperkenankan mengalikan silang, sehingga

$$\frac{2x - 2013}{x - 1} - 1 \leq 0$$

$$\frac{2x - 2013 - (x - 1)}{x - 1} \leq 0$$

$$\frac{2x - x - 2013 + 1}{x - 1} \leq 0$$

$$\frac{x - 2012}{x - 1} \leq 0$$

3.2.**Ketaksamaan QM-AM-GM-HM**

- QM adalah rataan kuadrat , $QM = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}{n}}$
- AM adalah rataan aritmatika , $AM = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$
- GM adalah rataan geometri , $GM = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3\ldots x_n}$
- HM adalah rataan harmoni , $HM = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$

Untuk ketaksamaan di atas berlaku $QM \geq AM \geq GM \geq HM$

3.3.**Ketaksamaan Pendukung**

- **Ketaksamaan Cauchy-Schwars**
  Jika $a, b, c,\ x, y, z \in \mathbb{R}$ maka
  $(\mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{cz})^2 \leq (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2)(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2)$
  kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a : b : c = x : y : z$
- **Ketaksamaan Chebysev**
  Jika $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dan $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ adalah 2 barisan bilangan yang monoton naik($a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ dan $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_n$), maka
  $\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right) \leq \left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\right)$

Contoh A.8

1)Jika $a \in$ bilangan real positif, buktikan bahwa $a + \frac{1}{a} \geq 2$

Bukti :

Dengan AM-GM

$$\frac{\frac{a}{1}+\frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt[2]{\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{1}{a}\right)}$$

Sehingga $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (terbukti)

2) Jika $a, b \in$ bilangan real positif dan $a + b = 1$, tunjukkan bahwa $ab \leq \frac{1}{2}$

Jawab :

Dengan AM-GM diperoleh

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq ab \Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq ab \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \geq ab$

Sehingga jelas pula bahwa $ab \leq \frac{1}{2}$ (terbukti)

3) Jika $a \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$

Jawab :

Gunakan AM-GM

Perhatikan bahwa $\frac{a^2+1+1}{2} \geq \sqrt{(a^2+1)(1)}$ sehingga akan diperoleh bentuk $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$

4) Jika $a, b, c \in$ bilangan real positif, buktikan bahwa $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

Bukti :

Dengan AM-GM kita mendapatkan bahwa

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right)}$$

Sehingga terbukti bahwa $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

5)Buktikan bahwa $1007^{2013} \geq 2013!$

Bukti :

$$\frac{1+2+3+4+\cdots+2013}{2013} \geq \sqrt[2013]{1.2.3.4\ldots2013}$$

$$\frac{2013.2014}{2} \geq 2013\sqrt[2013]{2013!}$$

$$1007 \geq \sqrt[2013]{2013!}$$

$$1007^{2013} \geq 2013!$$

Jadi terbukti bahwa $1007^{2013} \geq 2013!$

4. Nilai Mutlak

4.1. **Bentuk Umum : |…|**

Untuk x ∈ Real, maka $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

4.2. **Sifat-Sifat untuk Pertidaksamaan**

- Jika $|x| < a$ maka $-x < x < a$
- Jika $|x| > a$ maka $x < a$ atau $a > -x$
- Jika $|f(x)| > |g(x)|$ atau tanda itu sebaliknya, maka untuk menyelesaikannya masing-masing ruas dikuadratkan

Contoh A.9

1) penyelesaian untuk $|a - 2013| = 2011$ dan a ∈ Real adalah…

Jawab :

Perhatikan bahwa untuk a ∈ Real,
$|a - 2013| = \begin{cases} a - 2013 & jika \;\; a \geq 2013 \\ -(a - 2013) = 2013 - a & jika \;\; a < 2013 \end{cases}$

Untuk $a - 2013 \quad jika \;\; a \geq 2013$, maka

- $a - 2013 = 2011 \Rightarrow \; a = 4024$

Untuk $2013 - a \quad jika \;\; a < 2013$, maka

- $2013 - a = 2011 \Rightarrow \; a = 2$

Jadi solusinya adalah $a = 4024$ dan $a = 2$

2) Jika diketahui $x < -2013$, maka

(a) $\big|1 - |2 + x|\big| = \cdots$
(b) $\big|2013 - |2014 + x|\big| = \cdots$

Jawab :

(a) Perhatikan bahwa jika $x < -2013$, maka $2 + x < 0$, ambil saja misal $x = -10000$ sangat jelas *negatif*, sehingga $|2 + x| = -(2 + x)$. Selanjutnya $\big|1 - |2 + x|\big| = |1 - (-(2 + x))| = \; |1 + +2 + x| = |3 + x|$ dan $|3 + x| = -(3 + x)$ karena $x < -2013$

(b) Perhatikan juga bahwa $x < -2013$, maka

$|2014 + x| = \begin{cases} 2014 + x & jika\ \ x \geq -2014 \ldots \ldots \ldots \ldots .. \ldots \ldots .1) \\ -(2014 + x) & jika\ \ x < -2014 \ldots \ldots \ldots . \ldots \ldots \ldots \ldots 2) \end{cases}$

Sehingga

- Untuk persamaan 1) diperoleh $\big|2013 - |2014 + x|\big| = |2013 - 2014 - x| = |-1 - x|$ dan $|-1 - x| = -1 - x$ karena $x < -2013$
- Untuk persamaan 2) diperoleh $\big|2013 - |2014 + x|\big| = |2013 + 2014 + x| = |4027 + x| = \begin{cases} 4027 + x & jika\ x \geq -4027 \\ -(4027 + x) & jika\ x < -4027 \end{cases}$

Perhatikan bahwa batas $x < -2013$ kadang-kadang tidak kita tuliskan karena kondisi soal

3) (OSK 2005)Carilah semua solusi untuk $|x - 1| + |x - 4| = 2$

Jawab :

Perhatikan bahwa $\begin{cases} x < 1 & \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| = 1 - x \\ |x - 4| = 4 - x \end{cases} \\ 1 \leq x < 4 & \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| = x - 1 \\ |x - 4| = 4 - x \end{cases} \\ x \leq 4 & \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| = x - 1 \\ |x - 4| = x - 4 \end{cases} \end{cases}$

Untuk $x - 1 < 0$ atau $x < 1$, maka $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$, dan $|x - 4| = 4 - x$, sehingga

- $|x - 1| + |x - 4| = 1 - x + 4 - x = 2 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (tidak memenuhi karena $x < 1$

Untuk $1 \leq x < 4$, maka $|x - 1| = x - 1$, dan $|x - 4| = 4 - x$, sehingga

- $|x - 1| + |x - 4| = x - 1 + 4 - x = 2 \Rightarrow 3 = 2$, jelas tidak mungkin

Untuk $4 \leq x$, maka $|x - 1| = x - 1$, dan $|x - 4| = x - 4$, sehingga

- $|x - 1| + |x - 4| = x - 1 + x - 4 = 2 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$ (tidak memenuhi juga)

Jadi , tidak ada nilai yang memenuhi untuk persamaan di atas

4) Tentukan penyelesaian dari $|2a - 2013| > 2011$

Jawab :

$|2a-2013| = \begin{cases} (2a-2013) \geq 0 \ldots\ldots\ldots 1) \\ -(2a-2013) < 0 \ldots\ldots 2) \end{cases}$

Sehingga,

- Untuk 1) $2a - 2013 > 2011 \Rightarrow 2a > 4024 \Rightarrow a > 2012$
- Untuk 2) $-(2a-2013) > 2011 \Rightarrow -2a + 2013 > 2011 \Rightarrow 2a - 2013 < -2011$ $\Rightarrow 2a < -2011 + 2013 \Rightarrow a < 1$

Jadi penyelesaian di atas adalah $a < 1$ atau $a > 2012$

5)(Olimpiade Sains Porsema Tahun 2012)

Penyelesaian untuk $|x^2-2| - 6 + 2x < 0$, adalah…

(a) $-4 < x < 2$
(b) $x < -4$
(c) $x > 2$
(d) $2 < x < 4$
(e) $x < -2$

Jawab :

Perhatikan bahwa $|x^2-2| = \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1) \\ -(x^2-2) < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2) \end{cases}$

Sehingga

- Untuk 1) $x^2 - 2 - 6 + 2x < 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) < 0 \Rightarrow$ $-4 < x < 2$
- Untuk 2) $-(x^2-2) - 6 + 2x < 0 \Rightarrow -x^2 + 2 - 6 + 2x < 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 4 < 0$ $\Rightarrow x^2 - 2x + 4 > 0$ (definit negatif sehingga tidak memenuhi)

Jadi jawab soal di atas adalah (a)

5.polinom/Suku banyak

5.1.**Bentuk umum** $\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$

dengan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adalah akar-akar $f(x)$

Menurut teorem Vieta, maka sifat-sifat akar (x) ;

- $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

- $\sum_{i<j} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = x_1x_2x_3 + \cdots + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$

.

.

- $x_1x_2x_3x_4 \ldots x_{n-2}x_{n-1}x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Contoh A.10

1) Tentukan Jumlah semua akar dari $x^{2013} + x^3 + x + 2013 = 0$

Jawab :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_2 + x_1 = (-1)\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{0}{1} = 0$$

2) Tentukan jumlah semua faktor dari

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ldots(x-2011)(x-2012) + 2013 = 0$$

Jawab :

Faktornya adalah $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2011 + 2012 = \frac{1}{2}(2012)(2013) = (1006)(2013)$

5.2.**Menghitung nilai Polinom**

Setiap nilai x suatu polinom akan memiliki nilai tertentu. Karena nilai polinom tergantung dengan x maka polinom itu dapat dianggap sebagia fungsi dalam x.

Untuk menghitung nilai suatu polinom, substitusikan nilai x ke $f(x)$

5.3.**Pembagian Polinom**

Jika $f(x) = p(x).q(x) + s(x)$, dengan $p(x)$ adalah pembagi $f(x)$, $q(x)$ adalah hasil baginya serta $s(x)$ adalah sisa baginya, maka ada beberapa hal yang perlu kita perhatikan , yaitu :

- Jika pembaginya linier, maka hasil bagi dan sisanya dapat kita cari dengan metode **Synthesis Horner.**
  Metode pembagian **Synthesis Horner**
  a)Digit terakhir adalah sisa pembagian

b)Digit-digit lainnya adalah koefisien dari hasil pembagian tersebut
c)Pangkak hasil bagi adalah sama dengan pangkat polinom dikurangi satu

- Jika pembaginya tidak linier dan tidak dapat diuraikan kebentuk perpangkatan faktor linier, maka cara penentuan hasil bagi dan sisanya dapat kita tentukan dengan **identitas**
  Pengertian **Identitas** adalah :
  a)Dua buah bangun aljabar yang tidak sama bentuknya, tetapi sama nilainya pada setiap harga variabelnya
  b)Koefisien dari suku-suku sejenis pada ruas kiri dan kanan adalah sama

5.4.**Teorema sisa**

- Jika $f(x) = p(x).q(x) + s(x)$
  dengan :
  $f(x)$ = polinom yang akan dibagi
  $p(x)$ = pembagi polinom
  $q(x)$ = hasil dari pembagian
  $s(x)$ = sisa/residu pembagian
- Jika polinom $f(x)$ habis dibagi $(x - a)$ maka a adalah faktor dari $f(x)$ atau $f(a) = 0$
- Jika $f(x)$ dibagi $(x - a)$ maka sisa dari pembagian itu adalah $f(a)$
- Jika $f(x)$ dibagi $(x + a)$ maka sisa dari pembagian itu adalah $f(-a)$
- Jika $f(x)$ dibagi $(ax - b)$ maka sisa dari pembagian itu adalah $f(\frac{b}{a})$
- Jika $f(x)$ dibagi $(ax + b)$ maka sisa dari pembagian itu adalah $f(-\frac{b}{a})$
- $h(x) = p(x).q(x) + s(x)$ dengan $h(x)$ polinom yang dibagi, $p(x)$ adalah pembagi, $q(x)$ adalah hasil bagi serta $s(x)$ adalah sisa dari pembagian tersebut

5.5.**Teorema Faktor**

Misalkan polinom $f(x)$, $(x - k)$ adalah faktor dari $f(x)$ jika dan hanya jika $f(k) = 0$.

Sehingga :

- Jika $(x - a)$ adalah faktor dari $f(x)$, maka $x = a$ adalah akar dari $f(x) = 0$
- Jika $f(x)$ berlaku $f(a) = 0, f(b) = 0$ dan $f(c) = 0$, maka $f(x)$ habis dibagi $(x - a)(x - b)(x - c)$
- Jika $f(x)$ dibagi $(x - a)(x - b)$ dan bersisa S, maka
  $S = \frac{(x-a)}{(b-a)} f(b) + \frac{(x-b)}{(a-b)} f(a)$
- Jika $f(x)$ dibagi $(x - a)(x - b)(x - c)$ dan bersisa S, maka
  $S = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c\ )} f(a)$

Contoh A.10

1)Suatu polinom : $x^3 - x^2 - 3x - 2013$.

Hitunglah nilai suku banyak untuk : $0, 1, 3, 5$ dan 10

Jawab :

- Untuk $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 - 0 - 0 - 2013 = -2013$
- Untuk $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 1 - 3 - 2013 = -2016$
- Untuk $x = 3 \Rightarrow f(3) = 27 - 9 - 9 - 2013 = -2004$
- Untuk $x = 5 \Rightarrow f(5) = 125 - 25 - 15 - 2013 = -1928$
- Untuk $x = 10 \Rightarrow f(10) = 1000 - 100 - 30 - 2013 = -1153$

2) Jika $f(x) = x^5 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 532$ dibagi oleh $(x - 2)$, maka sisa dari pembagian itu adalah...

Jawab : Sisa pembagian tersebut adalah $f(2)$

3) Jika $f(x)$ dibagi $(x - 2)$ sisanya 24, sedangkan jika dibagi $(x + 5)$ bersisa 10. Jika $f(x)$ dibagi oleh $x^2 + 3x - 10$ akan bersisa...

Jawab :

Misalakan $f(x) = q(x)(x^2 + 3x - 10) + (ax + b)$

Dengan $q(x)$ adalah sisa pembagian dan $(ax + b)$ adalah sisa pembagian

$$f(x) = q(x)(x^2 + 3x - 10) + (ax + b)$$

$$f(x) = q(x)(x - 2)(x + 5) + (ax + b)$$

Untuk $x = 2 \Rightarrow f(2) = 0 + (2a + b) = 24$ ....1)

Untuk $x = -5 \Rightarrow f(-5) = 0 + (-5a + b) = 10$ ....2)

Persamaan 1) dan 2) dieliminasi-substitusi dan akan didapatkan nilai $a = 2$ dan $b = 20$

Jadi sisa pembagiannya adalah = $2x + 20$

4)(OSP 2006) Diketahui $(x - 1)^2$ membagi $ax^2 + bx^3 + 1$. Tentukan nilai ab

Jawab :

Perhatikan bahwa $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ membagi habis $ax^2 + bx^3 + 1$, maka

$ax^2 + bx^3 + 1 = (x^2 - 2x + 1)(cx^2 + dx + 1)$, ini yang paling mungkin.

Sehingga

$ax^2 + bx^3 + 1 = ax^4 + bx^3 + 0x^2 + 0x + 1 = cx^4 + (d - 2c)x^3 + (1 + c - 2d)x^2 + (d - 2)x + 1$. Dengan kesamaan nilai dari masing masing ruas diperoleh

- $a = c$
- $b = d - 2c$
- $0 = 1 + c - 2d$
- $0 = d - 2$

Dari 4 kesamaan di atas diperoleh nilai $a = c = 3$, $d = 2$ dan $b = -4$

Jadi , nilai $ab = (3)(-4) = -12$

5) Carilah faktor-faktor dari $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x + 12$

Jawab :

Jika $(x - a)$ merupakan faktor dari $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x + 12$, maka dimungkinkan nilai a adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6\ dan\ \pm 12$.

Misalkan $a = 1 \Longrightarrow f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 17(1) + 12 = 0$. Karena $f(1) = 0$ maka $(x - 1)$ merupakan faktor dari $f(x)$.

Untuk mencari faktor-faktor yang lain tentukan dengan hasil bagi $f(x)$ oleh $(x - 1)$ dengan metode **Synthesis Horner**

Dari pembagian di atas kita dapat faktor yaitu : $2x^2 + 5x - 12 = (2x - 3)(x + 4)$

Jadi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x + 12 = (x - 1)(2x - 3)(x + 4)$

6.Fungsi(Pemetaan)

6.1.Pengertian Fungsi/Pemetaan

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota dari himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.

Bentuk yang diperumum adalah

f : A $\rightarrow$ B (dibaca : f memetakan A ke B)

Jika misalkan $x \in$ A dipetakan ke $y \in$ B, maka dapat dikatakan " $\boldsymbol{y}$ **adalah peta dari** $\boldsymbol{x}$ **dari fungsi** $\boldsymbol{f}$ ", selanjutnya y dapat dituliskan sebagai $f(x)$.

- Elemen dari himpunan A adalah Domain(Df) disebut juga daerah asal, atau daerah prapeta
- Elemen dari himpunan B adalah Kodomain(Kf) disebut juga daerah kawan, atau daerah peta
- Hasil dari pemetaan ini selanjutnya dinamakan Range(Rf) atau derah jelajah

6.2.Macam-Macam Fungsi

Beberapa fungsi yang perlu diketahui adalah sebagai berikut:

- Fungsi konstan
- Fungsi Identitas
- Fungsi Harga mutlak(modulus)
- Fungsi Linier(garis lurus)
- Fungsi Kuadrat(parabola)
- Fungsi Eksponens
- Fungsi Logaritma

6.3.Sifat-Sifat Fungsi

Ada 3 sifat dalam fungsi, yaitu:

- Injektif(satu-satu)
  Jika setiap anggota himpunan A hanya memiliki satu pasangan(peta) di B.
  catatan : Tidak semua anggota himpunan B punya pasangan dari A
- Surjektif(onto/pada)
  Jika Setiap elemen dari himpunan B punya pasangan dari A
  Catatan : 1 atau lebih dari elemen himpunan A boleh hanya punya satu pasangan di B
- Bijektif(injektif + surjektif/korespondensi satu-satu)
  Jika setiap anggota himpunan A punya tepat satu pasangan di B demikian juga sebaliknya, sehingga banyaknya anggota himpunan A = B

6.4.Aljabar Fungsi

jika ada 2 fungsi f dan g terdefini, maka

- $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$,dengan domain fungsinya $D_{(f+g)} = D_f \cap D_g$
- $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$, dengan domain fungsinya $D_{(f-g)} = D_f \cap D_g$
- $f(x).g(x) = (f.g)(x)$,dengan domain fungsinya $D_{(f.g)} = D_f \cap D_g$
- $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$, dengan domain fungsinya $D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = D_f \cap D_g$ dan $g(x) \neq 0$

6.5.Komposisi Fungsi

Fungsi Komposisi adalah gabungan dari 2 fungsi atau lebih

- f(g(x)) = $(fog)(x)$ adalah komposisi pemetaan 2 fungsi yang berawal dari fungsi yang pertama yaitu g(x) dilanjutkan pemetaan yang kedua yaitu fungsi f(x)
- g(f(x)) = $(gof)(x)$ adalah kebalikan dari poin yang pertama di atas

6.6.Fungsi Invers

Fungsi invers adalah balikan dari fungsi semula

Andaikan fungsi pertama adalah , maka balikannya sebagai invers adalah f^{-1}

- $fof^{-1}(x) = x$
- $gog^{-1}(x) = x$
- $(fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x)$
- $(gof)^{-1}(x) = (f^{-1}og^{-1})(x)$
- $(fogoh)^{-1}(x) = (h^{-1}og^{-1}of^{-1})(x)$

Beberapa contoh formula untuk f^{-1}

- $f(x) = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x$
- $f(x) = ax + b \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$
- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
- $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-b+\sqrt{4ax+(b^2-4ac)}}{2a}$, jika Df $x > \frac{-b}{2a}$
- $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-b-\sqrt{4ax+(b^2-4ac)}}{2a}$, jika Df $x < \frac{-b}{2a}$
- $f(x) = \sqrt{ax+b} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x^2 - b)$
- $f(x) = a^{bx} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{b}.\,{}^{a}\log x$
- $f(x) = {}^{a}\log bx \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{b}.a^x$

Contoh A.11

1)Jika diketahui $f(x) = -x + 3$, maka $f(x^2) + \left(f(x)\right)^2 - 2f(x) = \ldots$

Jawab :

Diketahui suatu fungsi $f(x) = -x + 3$

- Untuk $f(x^2) = -x^2 + 3$
- Untuk $\left(f(x)\right)^2 = f^2(x) = \left(-(-x+3)\right)^2 = x^2 - 6x + 9$
- Untuk $-2f(x) = 2x - 6$

Sehingga $f(x^2) + \left(f(x)\right)^2 - 2f(x) = (-x^2 + 3) + (x^2 - 6x + 9) + (2x - 6) = -4x + 6$

2)Jika diketahui $g(x) = x + 1$ dan $(gof)(x) = 3x^2 + 4$, maka $f(x)$ adalah...

Jawab :

$f(x) = (g^{-1}0\ g\ 0\ f)(x)$

Dengan $g^{-1}(x)$ adalah invers dari $g(x)$ dan $g^{-1}(x) = x - 1$, sehingga

$f(x) = (3x^2 + 4) - 1 = 3x^2 + 3$

3)(OSK 2007) Jika $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ dan $f\left(g(x)\right) = 3$, maka $x = \cdots$

Jawab :

$f\left(g(x)\right) = (f\ 0\ g\ )(x) = 2\sqrt{x} - 1 = 3$

$\sqrt{x} = 2 \implies x = 4$

4)Didefinisikan untuk $f(x) = \frac{ax+1}{2-x}$. Jika $f^{-1}(4) = 1$, maka $f(3)$ adalah...

Jawab :

$f(x) = \frac{ax+1}{2-x} \implies f^{-1}(x) = \frac{-2x+1}{-x-a}$ jika diketahui $f^{-1}(4) = 1$,maka akan diperoleh nilai $a = 3$

Sehingga $f(3) = \frac{3.3+1}{2-3} = -10$

5)Jika $f^{-1}(x) = \frac{x}{x+1}$ dan $g^{-1}(x) = 2x - 1$, maka $(g\ 0\ f)^{-1}(x)$ adalah...

Jawab :

$$(g\ 0\ f)^{-1}(x) = (f^{-1}\ 0\ g^{-1})(x) = \frac{(2x-1)}{(2x-1)+1} = \frac{2x-1}{2x}$$

6)(OSK 2003)Jika f adalah sebuah fungsi yang memenuhi

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x$$

untuk setiap bilangan real $x \neq 0$. Tentukan nilai dari $f(2)$

Jawab :

Diketahui

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x$$

Setting $-x = \frac{1}{x}$, sehingga

$$f(-x) + (-x)f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x}$$

Jika 2 persamaan tersebut di eliminasi diperoleh $f(-x) = x^2 - \frac{1}{x} \Longrightarrow f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ dengan mengganti $-x$ dengan x .

Jadi $f(2) = 2^2 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

7.Barisan dan Deret

7.1.Barisan

- Aritmatika (Barisan Hitung)
- Geometri
- Khusus

Keterangan :

Barisan Aritmatika (BA) adalah barisan bilangan di mana setiap 2 suku yang berurutan memiliki selisih yang tetap(konstan)

Bentuk umum: a , $+b$, $a+2b$, $a+3b$, … , $a+(n-1)b$

Pada barisan Aritmatika berlaku

- $a = U_1 =$ suku pertama, $a + b = U_2 =$ suku ke dua , dst sampai $a + (n-1)b = U_n =$ suku terakhir pada barisan tersebut
- $b = beda =$ selisih tetap antara dua suku berurutan. b dapat dicari dengan $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \cdots = U_n - U_{n-1}$ atau $b = \frac{U_p - U_q}{p-q}$
- $U_n = S_n - S_{n-1} = a + (n-1)b$
- Suku tengah = $U_t = \frac{U_1 + U_n}{2}$, dengan n bilangan ganjil
- Sisipan suku : dengan beda baru $b_B = \frac{b_L}{k+1}$, dengan b_B = beda yang baru, b_L = beda pada barisan lama dan k adalah banyak sisipan bilangan

Barisan geometri (BG) adalah barisan bilangan di mana setiap 2 suku yang berurutan memiliki perbandingan(proporsi) yang tetap(konstan)

Bentuk umum: a , , ar^2 , ar^3 , … , ar^{n-1}

Pada barisan Geometri berlaku

- $a = U_1 =$ suku pertama, $ar = U_2 =$ suku kedua , dst sampai $ar^{n-1} = U_n =$ suku terakhir pada barisan tersebut
- $r = rasio =$ pembanding tetap antara dua suku berurutan. r dapat dicari dengan $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \cdots = \frac{U_n}{U_{n-1}}$ atau $r = \sqrt[p-q]{\left(\frac{U_p}{U_q}\right)}$
- $U_n = S_n - S_{n-1} = ar^{n-1}$
- Suku tengah = $U_t = \sqrt{U_1 . U_n}$, dengan n bilangan ganjil
- Sisipan suku : denga rasio baru = $r_B = \sqrt[k+1]{r_L}$, dengan r_B = rasio yang baru, r_L = rasio pada barisan lama dan k adalah banyak sisipan bilangan

Barisan Khusus

Beberapa contoh

- Barisan bilangan rekursif
  Persamaan rekursif(**recursion formula**) menyatakan bahwa pembentukan suku-suku berikutnya diperoleh dari suku-suku sebelumnya
  Barisan Aritmatika , *Barisan Geometri* dan *fungsi Ackermann* termasuk di dalamnya
  Relasi Rekursif
  a) Relasi Rekursif Linier Berderajat k
     Untuk bagian relasi
     $\boldsymbol{a_n + h_1(n)a_{n-1} + h_2(n)a_{n-2} + \cdots + h_k(n)a_{n-k} = f(n)}$ **,** $\boldsymbol{h_k(n) \neq 0}$
     dengan :
     $h_i(n)\ adalah\ fungsi\ dalam\ n\ (1 \leq i \leq k)$, juga koefisien
     i)Jika $h_i(n)$ berupa konstanta, maka i disebut relasi rekursif linier berderajat k dengan koefisien konstanta

ii)Jika $f(n) = 0$, maka disebut relasi rekursif linier homogen berderajat k dengan koefisien konstanta

Contoh :

1)$a_0 = a_1 = 1$
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$,$n \geq 2$
adalah relasi rekursif linier homogen berderajat 2 dengan koefisien konstanta

2) $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 4$
$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3} + n$,$n \geq 3$
adalah relasi rekursif linier nonhomogen berderajat 3 dengan koefisien konstanta

3)$a_n = na_{n-1} + (-1)^n$,$n \geq 1$
$a_0 = 1$
aadalah relasi rekursif linier nonhomogen dengan koefisien variabel

4)$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_0$, $n \geq 1$
adalah relasi rekursif nonlinier

b) Relasi Rekursif Linier Homogen Berderajat k dengan Koefisien Konstanta
Bentuk Umum :
$a_n + C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \cdots + C_ka_{n-k} = 0$, $C_k \neq 0$
$C_i\ adalah\ koefisien, (1 \leq i \leq k)$

Perhatikan bahwa untuk
$a_n + C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \cdots + C_ka_{n-k} = 0$
Misalkan $a_n = x^n\ (x \neq 0)$
$x^n + C_1x^{n-1} + \cdots + C_kx^{n-k} = 0$,jika masing-masing ruas dibagi x^{n-k}, maka persamaan menjadi
$x^k + C_1x^{k-1} + \cdots + C_k = 0$
adalah polinom berderajat k dengan akar sebanyak k juga.

1)***Jika semua akar berbeda***
$x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \cdots \neq x_k$, maka akan memiliki penyelesaian
$a_n = C_1x_1^n + C_2x_2^n + C_3x_3^n + \cdots + C_kx_k^n$

2)***Jika ada r akar yang sama***
Misalkan dari k akar ada m akar yang sama dengan $m < k$
$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_k$, maka akan memiliki penyelesaian
$a_n = C_1x_1^n + C_2nx_1^n + \cdots + C_mn^{m-1}x_1^n + C_{m+1}x_{m+1}^n + \cdots + C_kx_k^n$

- Barisan bilangan Fibonacci,
  Definisi secara rekursif sebagai berikut :
  $$F(n) = \begin{cases} 0 & jika\ n = 0 \\ 1 & jika\ n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & jika\ tidak\ keduanya \end{cases}$$
  Sehingga sebagai penjelasan dari definisi di atas adalah :
  $f_3 = f_1 + f_2$, $f_4 = f_2 + f_3$, $f_5 = f_3 + f_4$ demikian sterusnya
- Barisan bilangan(aritmatika)bertinggkat
  Pada barisan ini tingga melihat posisi suku sesudahnya

a. Tingkat pertama, adalah barisan aritmatika itu sendiri. Lihat pembahasan tentang barisan aritmatika
b. Tingkat kedua(Kuadrat)
   Jika setelah setiap selisih pada pola biasa untuk aritmatika (yang pertama), ternyata antar selisih itu membentuk selisih lagi dengan selisih tetap, jadi seolah-oleh barisan ini berupa barisan aritmatika dengan 2 tingkatan
   Jika $U_n = an^2 + bn + c$, maka
   1) $a = \frac{U_3+U_1-2U_2}{2} = \frac{selisih\ pada\ tingkat\ yang\ akhir}{2}$
   2) $a + b + c = U_1$
   3) $3a + b = U_2 - U_1$
   4) $5a + b = U_3 - U_2$
   5) $2a = (U_1 + U_3) - 2(U_2)$
c. Tingkat ketiga
   Sama pada tingkat dua, tetapi ternyata selisih-selisih bilangan tingkat dua ini masih membentuk barisan aritmatika lagi
   Untuk Tingakt 3 lebih lanjut
   $S(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$, dengan
   1) $S(n) =$ jumlah suku-suku sampai suku ke-n
   2) $a = \frac{selisih\ terakhir\ \ pada\ tingkat\ yang\ akhir}{6}$
   3) $a + b + c + d = U_1 = suku\ pertama$
   4) $8a + 4b + 2c + d = U_1 + U_2$
   5) $27a + 9b + 3c + d = U_1 + U_2 + U_3$

- Barisan bilangan Persegi ajaib
  Jika jumlah bilangan setiap baris, kolom, dan diagonal adalah sama dan untuk persegi ukuran n x n yang terisi digit-digit 1 sampai n^2, maka untuk menghitung jumlah bilangan setiap baris/kolom/diagonal dapat dihitung dengan formula $= \frac{1}{2}.n.(n^2 + 1)$
- Barisan Teleskopik
  Lihat pada bahasan berikutnya pada *prinsip teleskopik*

7.2.Deret

- Aritmatika(hitung) dan
- Geometri(ukur)
- Khusus

Keterangan :

Deret Aritmatika (DA) disebut juga deret hitung, sifat sama dengan barisan aritmatika

Bentuk umum : a +($a + b$) +($a + 2b$)+($a + 3b$)+ … +($a + (n - 1)b$)

- Jumlah suku ke-n = $S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$ atau $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$

Deret Geometri (DG) disebut juga deret ukur, sifat sama dengan barisan geometri

Bentuk umum : $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$

- Jumlah suku ke-n = $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, untuk r > 1 , atau $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, untuk r < 1
- Jika n mendekati ∞ maka $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$, untuk r pada -1 < r < 1 (deret konvergen=deret memiliki jumlah)
- Jika $|r| \geq 1$, maka deret divergen(tidak memiliki jumlah)

Deret Khusus

Beberapa contoh (*lihat pembahasan tentang Barisan Khusus*)

- Deret bilangan Fibonacci
- Deret bilangan(aritmatika)bertinggkat
- Deret bilangan Persegi ajaib
- Deret Teleskopik

7.3.Notasi Sigma

7.3.1.Pengertian

- Notasi Sigma dipergunakan untuk menuliskan secara singkat penjumlahan n suku, misalkan $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ menjadi $\sum_{k=1}^{n} u_k$
- Bentuk umum : $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$,
  dengan $k = 1$ sebagai batas bawah(mulai start) dan n sebagai batas atas(finish)
- Semua yang tidak berhubungan dengan indeks dianggap konstan

7.3.2.Sifat-Sifat

- $\sum_{k=1}^{3} u_k = u_1 + u_2 + u_3$
- $\sum_{k=1}^{5} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$
- $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$
- $\sum_{k=1}^{n} c = c.n$
- $\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} = u_2 + u_3 + \cdots + u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - u_1$
- $\sum_{k=1}^{5}(ak + b) = (a + b) + (2a + b) + (3a + b) + (4a + b) + (5a + b)$
- $\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k$
- $\sum_{k=1}^{n} c.u_k = c\sum_{k=1}^{n} u_k$

7.3.3.Formula pada beberapa deret

- $\sum_{k=0}^{n-1}(a+kb) = an + \frac{bn(n-1)}{2}$,adalah deret aritmatika
- $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{r^n-1}{r-1}$,adalah deret geometri
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
- $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$
- $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$
- $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$
- $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3)$
- $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
- $\sum_{k=1}^{n}(k+a)(k+b) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3a+3b) + nab$
- $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$

7.4.Prinsip teleskopik

- $\sum_{i=1}^{n} x_{i+1} - x_i = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n+1} - x_n) = x_{n+1} - x_1$
- $\prod_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{x_2}{x_1}.\frac{x_3}{x_2}.\frac{x_4}{x_3}.\ \ldots\ .\frac{x_n}{x_{n-1}}.\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{x_1}$
- $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$
- $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- $\frac{1}{x.(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)$
- $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)$
- $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+4)}$

Contoh A.12

1)Jumlah dari $\frac{2}{3} - 4 + \frac{4}{9} - \frac{4}{7} + \frac{8}{27} - \frac{4}{49} + \cdots$

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$\frac{2}{3} - 4 + \frac{4}{9} - \frac{4}{7} + \frac{8}{27} - \frac{4}{49} + \cdots = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots\right) + \left(-4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{49} - \cdots\right)$$

Dari penguraian di atas diperoleh 2 deret geometri sekaligus

- Untuk $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots$ adalah deret geometri tak hingga dengan $r=\frac{U_2}{U_1}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)}=2$$

- Untuk $-4-\frac{4}{7}-\frac{4}{49}-\cdots$ adalah deret geometri tak hingga dengan $r=\frac{U_2}{U_1}=\frac{-\frac{4}{7}}{-4}=\frac{1}{7}$

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{-4}{1-\left(\frac{1}{7}\right)}=\frac{-4}{\left(\frac{6}{7}\right)}=-\frac{14}{3}$$

Sehingga $(S_\infty)_1+(S_\infty)_2=2+\left(-\frac{14}{3}\right)=\frac{6-14}{3}=-\frac{8}{3}$

2)Ada 3 buah bilangan yang membentuk barisan aritmatika. jika suku tengah dikurangi 5 maka menjadi barisan geometri dengan rasio 2. Jumlah barisan aritmatika tersebut adalah…

Jawab :

Misalkan 3 buah bilangan yang membentuk barisan aritmatika itu adalah $a,(a+b),(a+2b)$ dan jika $a,(a+b-5),(a+2b)$ akan terbentuk barisan geometri.

- Pada barisan geometri berlaku $U_2^2=U_1.U_3$, sehingga

$$(a+b-5)^2=a.(a+2b)$$
$$a^2+2ab+b^2-10a-10b+25=a^2+2ab$$
$$b^2-10b+25=10a$$
$$(b-5)^2=10a$$
$$b-5=\pm\sqrt{10a}$$

- Pada barisan geometri di atas juga disebutkan rasionya 2, sehingga

$$\frac{U_2}{U_1}=2$$
$$\frac{U_3}{U_1}=2^2=4$$
$$\frac{a+2b}{a}=4\Rightarrow a+2b=4a\ \Rightarrow 2b=3a$$

Hasil pada poin 1) dan 2) disubstitusikan, sehingga

Untuk $2b=3a\Rightarrow b=\frac{3}{2}a$

$$\left(\frac{3}{2}a-5\right)^2=10a$$

$$\frac{9}{4}a^2-25a+25=0$$

$$a=\begin{cases} a_1=10 \implies b_1=15 \\ a_2=\frac{10}{9} \implies b_2=\frac{5}{3} \end{cases}$$

Sehingga ada 2 barisan aritmatika dan goemetri jika suku kedua dikurangi 5 sekaligus, yaitu

- Barisan aritmatika $=\begin{cases} 10, 25, 40 \implies S_3=10+25+40=75 \\ \frac{10}{9}, \frac{25}{9}, \frac{40}{9} \implies S_3=\frac{75}{9} \end{cases}$
- Barisan geometri $=\begin{cases} 10, 20, 40 \\ \frac{10}{9}, \frac{20}{9}, \frac{40}{9} \end{cases}$

Jadi, jumlah barisan aritmatika di atas adalah 75 atau $\frac{75}{9}$

3)(Mat Das-UM UGM 2008) Jika S_n adalah jumlah n suku suatu deret geometri dengan rasio r. Tentukan nilai $\frac{S_{4n}}{2\,S_{2n}}$ adalah…

a) r^{2n} b)$\frac{1}{2}(r^{2n}-1)$ c)$\frac{1}{2}+r^{2n}$ d) $\frac{1}{2}(r^{2n}+1)$ e) $r^{2n}+1$

Jawab : (d)

Diketahui pada deret geometri berhingga dengan $r>1$, adalah

- $S_n=a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)$
- $S_{4n}=a\left(\frac{r^{4n}-1}{r-1}\right)$
- $S_{2n}=a\left(\frac{r^{2n}-1}{r-1}\right)$

Sehingga nilai $\frac{S_{4n}}{2\,S_{2n}}=\frac{a\left(\frac{r^{4n}-1}{r-1}\right)}{2\,a\left(\frac{r^{2n}-1}{r-1}\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{r^{4n}-1}{r^{2n}-1}\right)=\frac{1}{2}(r^{2n}+1)$

4)Tentukan besar suku ke-2013 dari barisan 1, 3, 6, 10, …

Jawab :

$\underbrace{1 \quad 3 \quad 6}_{\underbrace{2 \quad 3}_{1}}$, demikian juga untuk $\underbrace{3 \quad 6 \quad 10}_{\underbrace{3 \quad 4}_{1}}$ ... adalah barisan aritmatika tingkat 2 kita gunakan rumus $U_n = an^2 + bn + c$

dengan

- $a = \frac{U_3+U_1-2U_2}{2} = \frac{6+1-2.3}{2} = \frac{1}{2}$
- $3a + b = U_2 - U_1 \Rightarrow \frac{3}{2} + b = 3 - 1 \Rightarrow b = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$
- $a + b + c = U_1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c = 1 \Rightarrow c = 0$

Maka $U_n = an^2 + bn + c \;\; \Rightarrow U_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 0 = \frac{1}{2}n(n+1)$

Serhingga $U_{2013} = \frac{2013.2014}{2}$

5)(Mat Das UM UI 2009)Jika billangan ganjil dikondisikan seperti berikut : $\{1\}$, $\{3,5\}$, $\{7,9,11\}$, $\{13,15,17,19\}$, ... , maka suku tengah dari kelompok ke-17 adalah…

Jawab :

Perhatikan bahwa suku tengah dari $U_1 = 1$, suku tengah dari $U_2 = 4$, suku tengah dari $U_3 = 9$ dst. Sebagai catatan bahwa U_1 adalah kelompok 1, U_2 adalah kelompok ke-2 demikian seterusnya.

$$U_1 = 1 = 1^2$$

$$U_2 = 4 = 2^2$$

$$U_3 = 9 = 3^2$$

$$\ldots$$

maka suku ke-17 adalah

$$U_{17} = 17^2 = 289$$

Jadi suku ke-17 adalah 289.

Catatan : kita juga dapat mencarinya dengan barisan aritmatika tingkat 2

6)Tentukan Rumus jumlah suku ke-n dan S_{2013} dari 2, 3, 6, 12, 22, …

Jawab :

$\underbrace{2 \quad 3 \quad 6 \quad 12}_{\underbrace{1 \quad 3 \quad 6}_{\underbrace{2 \quad 3}_{1}}}$, demikian juga untuk $\underbrace{3 \quad 6 \quad 12 \quad 22}_{\underbrace{3 \quad 6 \quad 10}_{\underbrace{3 \quad 4}_{1}}}$ … adalah barisan aritmatika tingkat 3, selanjutnya untuk jumlah suku ke-n , yaitu $S(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$

- $a = \frac{selisih\ terakhirnya}{6} = \frac{1}{6}$
- $a + b + c + d = U_1 \Longrightarrow \frac{1}{6} + b + c + d = 2 \Longrightarrow b + c + d = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$ ....1)
- $8a + 4b + 2c + d = U_1 + U_2 = 2 + 3 = 5 \Longrightarrow \frac{4}{3} + 4b + 2c + d = 5 \Longrightarrow 4b + 2c + d = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$ ....2)
- $27a + 9b + 3c + d = U_1 + U_2 + U_3 = 2 + 3 + 6 = 11 \Longrightarrow \frac{9}{2} + 9b + 3c + d = 11 \Longrightarrow 9b + 3c + d = 11 - \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$ ....3)

Maka ada 3 persamaan , untuk persamaan 1) dan 2) diperoleh $3b + c = \frac{11}{6}$ ....4)

Dari persamaan 3) dan 2) diperoleh $5b + c = \frac{17}{6}$ ....5)

Dari persamaan 4) dan 5) diperoleh $2b = 1 \Longrightarrow b = \frac{1}{2}$ ....6)

Dari persamaan 5) dan 6) diperoleh $c = \frac{1}{3}$ ....7)

Dan dari persamaan 1) dan 7) diperoleh $d = 2 - (a + b + c) = 2 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 2 - 1 = 1$

Sehingga $S(n) = an^3 + bn^2 + cn + d = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n + 6)$

dan $S_{2013} = \frac{1}{6}(2013^3 + 3.2013^2 + 2.2013 + 6)$

7) Tentukan jumlah dari

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \frac{1}{2+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa

$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}$

dst

$\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}} = \sqrt{2013} - \sqrt{2012}$

dengan menggunakan prinsip teleskopik , kita dapat melihatnya sebagai
$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \frac{1}{2+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}} = (\sqrt{2} - 1\ ) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{2013} - \sqrt{2012}) = \sqrt{2013} - 1$

8)Tentukan penyelesaian realsi rekursif berikut

a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$,untuk $n \geq 2$
b) $a_n - 3a_{n-2} - 2a_{n-3} = 0$, untuk $n \geq 3$
$a_0 = 1, a_1 = a_2 = 2$

Jawab :

a)Diketahui $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$,untuk $n \geq 2$

Misalkan $a_n = x^n$, maka $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$. Bila masing-masing ruas dibagi dengan x^{n-2} maka persamaan menjadi $x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Sehingga bentuk penyelesaian umumnya adalah :

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$a_0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$ ....1)

$a_1 = 1 \Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)C_2 = 1$ ....2)

Dari persamaan 1) dan 2) diperoleh

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)C_2 = 1$ $\quad -$

$\sqrt{5}C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$

dan $C_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$

Sehingga

$$a_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \geq 0 \ atau$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

b)Diketahui $a_n - 3a_{n-2} - 2a_{n-3} = 0$, $n \geq 3$

Misalkan $a_n = x^n$ $(x \neq 0)$

$x^n - 3x^{n-2} - 2x^{n-3} = 0$, jika masing-masing ruas dibagi x^{n-3}, maka

$x^3 - 3x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = -1$ $\quad$ (***ada 2 akar yang sama, yaitu*** $\boldsymbol{x_2 = x_3 = -1}$)

Sehingga bentuk penyelesaian umumnya adalah :

$$\boldsymbol{a_n = C_1 2^n + C_2(-1)^n + C_3 n(-1)^n}$$

$a_0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$ ....1)

$a_1 = 2C_1 - C_2 - C_3 = 2$ ....2)

$a_2 = 4C_1 + C_2 + 2C_3 = 2$ ....3)

Dari eliminasi 2) dan 3) diperoleh

$4C_1 - 2C_2 - 2C_3 = 4$

$4C_1 + C_2 + 2C_3 = 2$ $\qquad\qquad\qquad +$

$8C_1 - C_2 = 6$ ………… 4)

dan dengan persamaan 1) dan 4) diperoleh $C_1 = \frac{7}{9}$

dan diperoleh pula $C_2 = \frac{2}{9}$, serta $C_3 = -\frac{6}{9}$

Sehingga $a_n = \frac{7}{9}2^n + \frac{2}{9}(-1)^n - \frac{6}{9}n(-1)^n \, , n \geq 0$

Catatan : Relasi rekursif yang paling sering muncul, yaitu pada **Kombinatorika**

8.Persamaan dan Sistem Persamaan

8.1.Pesamaan

8.1.1.**Persamaan Kuadrat**

Bentuk Umum : $ax^2 + bx + c = 0$,dengan $a \neq 0$, $a, b, dan\ c\ \in \mathbb{R}$ dan akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah $x_1 \text{ dan } x_2$ selanjutnya dituliskan sebagai

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0$$

- $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$
- $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$
- D = Diskriminan = $b^2 - 4ac$
- Jika D >0 maka persamaan kuadrat tersebut memiliki 2 akar real dan berbeda
- Jika D $\geq$ 0 maka persamaan kuadrat tersebut memiliki 2 akar real
- Jika D = 0 maka persamaan kuadrat tersebut memiliki 2 akar kembar/sama
- Jika D < 0 maka persamaan kuadrat tersebut memiliki 2 akar tidak real/imajiner
- Persamaan Kuadrat Baru : $x^2 - (x_1 + x_2)x - x_1.x_2 = 0$, jika diketahui akar-akarnya x_1 dan x_2
- Bila berbentuk akar $a, b \geq 0$

a) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
b) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$,syarat $a \geq b$

8.1.2.Persamaan Lingkaran

8.1.2.1.Persamaan Lingkaran dengan pusat $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ dan $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

- Lingkaran adalah kumpulan titik-titik yang berjarak sama terhadap satu titik tetap/tertentu. Selanjutnya titik tetap kita sebut pusat lingkaran dan jarak tertentu kita sebut sebagi jari-jari(radius)lingkaran
- Bentuk umum : $(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$, r adalah jari-jari lingkaran dan (a,b) adalah pusat lingkaran
- Jika pusat lingkaran (0,0) maka persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 = r^2$
- Bentuk lain persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

8.1.2.2.Persamaan Garis Singgung Lingkaran(PGSL)

- Garis singgung lingkaran (PGSL) dengan gradien m
  a) Jika persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 = r^2$
     maka PGSL-nya adalah : $y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$
  b) Jika persamaan lingkaran : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
     maka PGSL-nya adalah : $(y-b) = m(x-a) \pm r\sqrt{m^2+1}$
- Garis singgung melalui sebuah titik (x_1, y_1) pada lingkaran
  a) Jika persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 = r^2$
     maka PGSL-nya adalah : $x_1x + y_1y = r^2$
  b) Jika persamaan lingkaran : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
     maka PGSL-nya adalah : $(x_1-a)(x-a) + (y_1-b)(y-b) = r^2$
- Garis singgung melalui sebuah titik di luar lingkaran
  a) Dengan memanfaatkan hubungan antara garis lurus dengan lingkaran
  b) Dengan garis polar
  c) Dengan bantuan garis singgung

8.2.Sistem Persamaan

8.2.1.**Sistem Persamaan Linier**

- Persamaan linier adalah polinom paling dasar
- Pangkat tertinggi untuk variabel adalah satu
- Grafik berupa garis lurus
- Bentuk yang diperumum : $ax + by + c = 0$
- Untuk penyelesaian n buah variabel dibutuhkan n persamaan

8.2.2.**Sistem Persamaan Nonlinier**

- Bentuk umum tidak ada
- Pangkat untuk variabel dimungkinkan bisa lebih dari 1dan kadang berupa perkalian antar variabel itu sendiri
- Penyelesaian membutuhkan teknik tertentu atau kadang lebih khusus

Contoh A.12

1) Persamaan kuadrat dimana akar-akarnya 2 lebih besar dari akar-akar persamaan $x^2 + px + 1 = 0$ tetapi 3 lebih kecil dari akar-akar persamaan $2x^2 - 3x + q = 0$ adalah...

Jawab :

Misalkan persamaan kuadrat yang diinginkan memiliki akar α dan β sbagaimana berikut

$$\boldsymbol{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0}$$

Sehingga

- Jika akar-akarnya 2 lebih besar dari $x^2 + px + 1 = 0$ dan persamaan $x^2 + px + 1 = 0$ memiliki akar x_1 dan x_2 serta $x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{1}\right) = -p$, $x_1.x_2 = \left(\frac{1}{1}\right) = 1$ maka $\alpha = x_1 + 2$ dan $\beta = x_2 + 2$ selanjutnya
  $\alpha + \beta = (x_1 + 2) + (x_2 + 2) = x_1 + x_2 + 4 = -p + 4$ ....1)
  $\alpha\beta = (x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 1 + 2(-p) + 4 = 5 - 2p$ ......2)
- Jika akar-akarnya 3 lebih kecil dari $2x^2 - 3x + q = 0$ dan persamaan $2x^2 - 3x + q = 0$ memiliki akar x_3 dan x_4 serta $x_3 + x_4 = \left(\frac{3}{2}\right)$, $x_3.x_4 = \left(\frac{q}{2}\right)$ maka
  $\alpha + \beta = (x_3 - 3) + (x_4 - 3) = x_3 + x_4 - 6 = \frac{3}{2} - 6 = -\frac{9}{2}$ ....3)
  $\alpha\beta = (x_3 - 3)(x_4 - 3) = x_3x_4 - 3(x_3 + x_4) + 9 = \frac{q}{2} - \frac{9}{2} + 9 = \frac{q}{2} + \frac{9}{2}$ ....4)

Dari keempat persamaan di atas diperoleh

$\alpha + \beta = -p + 4 = -\frac{9}{2} \Longrightarrow p = \frac{17}{2}$ ....5)

selanjutnya $\alpha + \beta = -\frac{9}{2}$

dan untuk q didperoleh dari 5) disubstitusikan ke 2)

$\alpha\beta = 5 - 2p = \frac{q}{2} + \frac{9}{2} \implies q = 2\left(5 - 2p - \frac{9}{2}\right) = \frac{16}{2}$

maka $\alpha\beta = -12$

Sehingga persamaan kuadrat barunya

$$\boldsymbol{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0}$$

$$\boldsymbol{x^2 - \left(-\frac{9}{2}\right)x + (-12) = 0}$$

$$\boldsymbol{2x^2 + 9x - 24 = 0}$$

2) Misalkan diberikan $p = \frac{1+3x^2}{x-x^2}$. Tentukan batas-batas p supaya x real?

Jawab :

Untuk $p = \frac{1+3x^2}{x-x^2}$, maka $3x^2 + 1 = px - px^2 \Leftrightarrow (p+3)x^2 - px + 1 = 0 \begin{cases} a = (p+3) \\ b = -p \\ c = 1 \end{cases}$.
Supaya persamaan kuadrat tersebut memiliki akar real maka diskriminan $(D = b^2 - 4ac)$ harus lebih besar atau sama dengan nol.

Sehingga $D \geq 0$

$b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow (-p)^2 - 4(p+3)(1) \geq 0 \Rightarrow p^2 - 4p - 12 \geq 0$

$(p-6)(p+2) \geq 0$

Jadi batas p adalah : $p \leq -2$ atau $p \geq 6$

3)(OSK 2005) Jika a dan b adalah bilangan real tak nol yang memenuhi $9a^2 - 12ab + 4b^2 = 0$, maka nilai $\frac{a}{b}$ adalah …

Jawab :

Perhatika bahwa $9a^2 - 12ab + 4b^2 = 0 \Rightarrow (3a - 2b)^2 = 0 \Rightarrow 3a - 2b = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

4) (AIME 1990) Penyelesaian dari $\left(52 + 6\sqrt{43}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(52 - 6\sqrt{43}\right)^{\frac{3}{2}}$

Jawab :

Perhatikan bahwa

- $\left(52 + 6\sqrt{43}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(52 + 6\sqrt{43}\right)^3} = \sqrt{\left(43 + 9 + 2.3\sqrt{43}\right)^3} = \left(\sqrt{43} + \sqrt{9}\right)^3$
- $\left(52 - 6\sqrt{43}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(52 - 6\sqrt{43}\right)^3} = \sqrt{\left(43 + 9 - 2.3\sqrt{43}\right)^3} = \left(\sqrt{43} - \sqrt{9}\right)^3$

Selanjutnya $\left(\sqrt{43}+\sqrt{9}\right)^3 = \left(\sqrt{43}\right)^3 + 3\left(\sqrt{43}\right)^2.\sqrt{9} + 3\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{9}\right)^2 + \left(\sqrt{9}\right)^3$ dan

$$\left(\sqrt{43}-\sqrt{9}\right)^3 = \left(\sqrt{43}\right)^3 - 3\left(\sqrt{43}\right)^2.\sqrt{9} + 3\left(\sqrt{43}\right)\left(\sqrt{9}\right)^2 - \left(\sqrt{9}\right)^3$$

Sehingga $\left(52+6\sqrt{43}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(52-6\sqrt{43}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\left(\sqrt{43}\right)^3 + 3\left(\sqrt{43}\right)^2.\sqrt{9} + 3\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{9}\right)^2 + \left(\sqrt{9}\right)^3\right) - \left(\left(\sqrt{43}\right)^3 - 3\left(\sqrt{43}\right)^2.\sqrt{9} + 3\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{9}\right)^2 - \left(\sqrt{9}\right)^3\right) = 2\left(\left(3\sqrt{43}\right)^2\sqrt{9} + \left(\sqrt{9}\right)^3\right) = 2(9.43+27) = 828$

5) Persamaan lingkaran dengan titik pusat $(3,4)$ dan berjari-jari 5 adalah …

Jawab :

Diketahui titik pusat $(3,4)$ dan jari-jarinya 5, maka persamaan lingkarannya adalah

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

6) Tentukan persamaan lingkaran yang titik pusatnya terletak pada garis $y = x + 1$ dan menyinggung sumbu X di titik $(5,0)$?

Jawab :

Diketahui pusat lingkaran terletak di garis $y = x + 1$ dan lingkaran itu menyinggung sumbu X di $(5,0)$, maka jari-jari lingkaran = $r = y = x + 1$, jika $x = 5 \Rightarrow r = y = 6$.

Sehingga diketahui lingkaran itu berpusat di $(5,6)$ dan berjari-jari 6

Jadi, persamaan lingkaran itu $(x-5)^2 + (x-6)^2 = 6^2$

7) Persamaan garis singgung untuk titik $(7,-1)$ yang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 50$ adalah

Jawab :

PGSL-nya untuk titik yang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 50$ adalah

$$7x - y = 50$$

8) Jika garis $3x + 4y + k = 0$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$, maka nilai k adalah…

Jawab :

Perhatikan bahwa lingkaran $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ memiliki jari-jari $r = 5$, sebab

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0 \iff (x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

Sehingga dari persamaan di atas diketahui bahwa pusat lingkaran terletak di $(-3,-4)$. Dan jarak titik pusat lingkaran dengan garis singgung $(3x + 4y + k = 0\ )$ itu adalah

$$d = r = 5 = \left|\frac{3(-3) + 4(-4) + k}{\sqrt{3^3 + 4^2}}\right|$$

$$5.5 = -9 - 16 + k \implies k = 50$$

Selain $k = 50$ ada k yang lain dikarenakan titik $(0,0)$ pada lingkaran dan garis $3x + 4y + k = 0$ juga melalui $(0,0)$ saat $k = 0$.

Jadi, $k = 0$ atau $k = 50$

9) Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang dibentuk oleh titik $(7,-1)$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 40$?

Jawab :

Cek dulu titik $(7,-1)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 40$

Titik $(7,-1) \implies 7^2 + (-1)^2 = 49 + 1 = 50 > 40$, jelas bahwa titik$(7,-1)$ terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 40$.

Misalkan garis singgung yang melalui $(7,-1)$ adalah $y = mx - 7m - 1$, maka hasil ini kita substitusikan ke persamaan lingkaran tersebut, yaitu

$$x^2 + y^2 = 40 \implies x^2 + (mx - 7m - 1)^2 = 40$$

$$x^2 + m^2x^2 + 49m^2 + 1 - 14m^2x - 2mx + 14m - 40 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 - (14m^2 + 2m)x + 49m^2 + 14m - 39 = 0$$

Perhatikan bahwa persamaan di atas berupa persamaan kuadrat dengan peubah x, dan syarat menyinggung adalah saat $D = 0$, dengan $D = b^2 - 4ac$, yaitu ;

$$\left(-(14m^2 + 2m)\right)^2 - 4(1 + m^2)(49m^2 + 14m - 39) = 0$$

$$196m^4 + 56m^2 + 4m^2 - 196m^2 - 56m + 156 - 196m^4 - 56m^3 + 156m^2 = 0$$

$$-36m^2 - 56m + 156 = 0$$

$$9m^2 + 14m - 39 = 0 \begin{cases} a = 9 \\ b = 14 \\ c = -39 \end{cases}$$

$$m_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4(9)(-39)}}{2.9} = \frac{-14 \pm \sqrt{1600}}{18} = \frac{-14 \pm 40}{18}$$

$$m_1 = \frac{-14 + 40}{18} = \frac{13}{9} \text{ atau } m_2 = \frac{-14 - 40}{18} = -3$$

Jadi persamaan garis singgung adalah $\begin{cases} y_1 = mx - 7m - 1 = \frac{13}{9}x - \frac{100}{9} \\ y_2 = mx - 7m - 1 = -3x + 20 \end{cases}$

10)Tentukan semua solusi untuk $x + y$ yang memenuhi sistem persamaan

$$x + y + \frac{x}{y} = 232 \; dan \; \frac{x(x + y)}{y} = 2007$$

Jawab :

Dari soal diketahui $x + y + \frac{x}{y} = 232$ sehingga dapat kita tuliskan menjadi $\frac{x}{y} = 232 - (x + y$, maka persamaan menjadi

$$\frac{x}{y} = 232 - (x + y) \dots \dots \dots .1)$$

$$\frac{x(x + y)}{y} = 2007 \dots \dots \dots \dots 2)$$

Substitusikan persamaan 1) ke persamaan 2), akan kita peroleh

$\big(232 - (x + y)\big)(x + y) = 2007 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 232(x + y) + 2007 = 0$

$\Leftrightarrow (x + y - 9)(x + y - 223) = 0 \Leftrightarrow x + y = 9$ atau $x + y = 223$

Jadi , ada 2 nilai untuk $x + y$ yaitu 9 dan 223.

11) Tentukan semua solusi untuk pasangan (x, y) real yang memenuhi

- $x^2 + y^2 + x + y = 12$ dan
- $xy + x + y = 3$

Jawab :

Perhatikan bahwa

$x^2+y^2+x+y=12$ dapat diubah menjadi

$x^2+y^2+x+y=12 \Rightarrow (x+y)^2-2xy+x+y-12=0 \Rightarrow$

$(x+y)^2+2(x+y)+1-2xy-(x+y)-13=0 \Rightarrow$

$(x+y+1)^2-(x+y)-2xy-13=0$ ....1)

Untuk $xy+x+y=3$ dapat diubah menjadi $x+y=3-xy$ ....2)

Substitusikan 2) ke 1) sehingga kita mendapatkan

$(3-xy+1)^2-(3-xy)-2xy-13=0 \Rightarrow (4-xy)^2-xy-16=0$

$\Rightarrow (xy)^2-9xy=0 \Rightarrow (xy)(xy-9)=0 \Rightarrow xy=0$ atau $xy=9$

Jadi yang memenuhi kondisi seperti soal di atas adalah $(3,0),(0,3)$ dan $(-3,-3)$

9.Aritmetika

- Pemecahan masalah dalam kehidupan(penjumlahan, pembagian serta perkalian) yang berkaitan dengan konsep aljabar
- Mengubah informasi dari soal(cerita) ke dalam persamaan matematis yang lebih sederhana
- Pemodelan yang tepat dalam matematika
- Teknik problem solving yang tepat
- Contoh kasus/problem : masalah waktu kejadian/masa, jarak, kecepatan, proporsi, konversi, logika dll

Contoh A.13

1) Jika $A:B=3:4$ dan $B:C=3:5$, maka $A:C$ adalah

Jawab :

Jika diketahui $A:B=3:4$ dan $B:C=3:5$, maka perbandingan tersebut dapat dituliskan sebagai $A:B=(3.3):(4.3)$ dan $B:C=(3.4):(5.4)$

Jadi $A:C=9:20$

2) Jika anda berkendara sejauh paruh pertama perjalanan 100 km dengan kecepatan 60 km per jam dan di paruh kedua dengan kecepatan 40 km per jam, maka berapakah kecepatan rata-rata anda?

Jawab :

- Paruh pertama $t_1 = \frac{s}{v} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}\ jam$
- Paruh kedua $t_2 = \frac{s}{v} = \frac{50}{40} = \frac{5}{4}\ jam$
- Sehingga total waktu $= \frac{5}{6} + \frac{5}{4} = \frac{25}{12} jam$

Sehingga kecepatan rata-rata anda $= \frac{jarak}{tota\ waktu} = \frac{100}{\left(\frac{25}{12}\right)} = 48$ km per jam

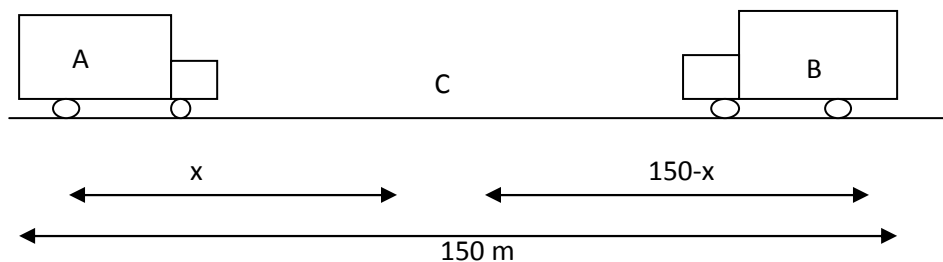
3) Diketahui ada 2 mobil A dan B melaju, jarak keduanya 150 meter dan kecepatan masing-masing 30 $\frac{m}{s}$ dan 20 $\frac{m}{s}$. Kapan keduanya bertemu jika keduanya berangkat bersamaan

a) A dan B saling menyongsong

b) A mengejar B

Jawab :

a)Untuk peristiwa saling menyongsong

Perhatikan ilustrasi berikut ini

Andaikan mereka bertemu di C

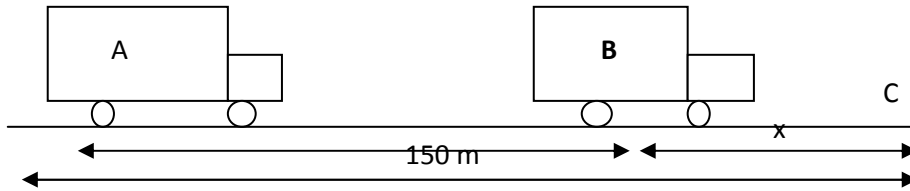
- Untuk jarak AC $\Longrightarrow x = V_A.t = 30t$ ....1)
- Untuk jarak BC $\Longrightarrow 150 - x = V_B.t = 20t$ ....2)

Substitusikan 1) ke 2) sehingga diperoleh

$$150 - 30t = 20t$$

$$t = 3\ detik$$

b) A mengejar B

Perhatikan juga ilustrasi berikut

Andaikan bertemu di C

- Untuk arak BC $\Longrightarrow x = V_B.t = 20t$ ....3)
- Untuk arak BC $\Longrightarrow 150 + x = V_A.t = 30t$ ....4)

Substitusikan 3) ke 4) sehingga diperoleh

$$150 + 20t = 30t$$

$$t = 15\ detik$$

4)(Mat Das UM UI 2009) Suatu kelas memiliki jumlah siswa antara 15 sampai dengan 40 dan $\frac{1}{4}$ dari jumlah siswa tersebut tahu cara bermain catur. Pada hari Rabu, 7 siswa harus absen karena mengikuti lomba Matematika. Jika pada hari itu, $\frac{1}{5}$ dari siswa yang masuk tahu cara bermain catur, maka jumlah siswa yang tahu cara bermain catur dan masuk pada hari Rabu adalah…

a) 3 b) 4 c) 5 d) 8 e) 10

Jawab :

Misalkan x adalah jumlah seluruh siswa, maka $15 \leq x \leq 40$. Siswa yang tahu bermain catur seluruhnya adalah $\frac{1}{4}$ nya, sehingga jumlahnya adalah $\frac{15}{4} \leq \frac{1}{4}x \leq 10$.

Pada hari Rabu, 7 siswa absen dan total murid menjadi $8 \leq x - 7 \leq 33$ dan $\frac{1}{5}$ nya tahu bermain catur. Sehingga pada Hari Rabu siswa yang masuk dan tahu cara bermain catur adalah $\frac{1}{5}(8 \leq x - 7 \leq 33)$ atau $\frac{8}{5} \leq \frac{x-7}{5} \leq \frac{33}{5} \Longrightarrow 1\frac{3}{5} \leq \frac{x-7}{5} \leq 6\frac{3}{5}$

Jadi, pilihan yang tepat/memungkinkan adalah c) yaitu 5

B.TEORI BILANGAN

1.Sistem Bilangan Bulat

1.1.Prinsip dasar operasi dua buah bilangan

- Penjumlahan atau pengurangan 2 bilangan ganjil = bilangan genap
- Penjumlahan atau pengurangan 2 bilangan genap = bilangan genap
- Penjumlahan atau pengurangan satu ganjil dan yang lain genap atau sebaliknya = bilangan ganjil
- Perkalian 2 bilangan genap = bilangan genap
- Perkalian 2 bilangan ganjil = bilangan ganjil
- Perkalian 2 bilangan yang satu ganjil dan yang lain genap atau sebalinya = bilangan genap

1.2. Bilangan Bulat(lanjutan)

Sifat-sifat yang berlaku pada bilangan bulat positif adalah :

- Habis dibagi 2 jika dan hanya jika digit satuannya genap
- Habis dibagi 4 jika dan hanya jika 2 digit terkhirnya habis dibagi 4
- Habis dibagi 8 jika dan hanya jika 3 digit terakhirnya habis dibagi 8
- Habis dibagi 2^m jika dan hanya jika m digit terakhirnya habis dibagi 2^m
- Habis dibagi 3 jika dan hanya jika jumlah semua digitnya habis dibagi 3
- Habis dibagi 6 jika dan hanya jika memenuhi keterbagian 3 dan digit terakhirnya genap
- Habis dibagi 9 jika dan hanya jika jumlah semua digitnya habis dibagi 9
- Habis dibagi 5 jika dan hanya jika digit terakhirnya berupa 0 atau 5
- Habis dibagi 7 jika dan hanya jika 7 membagi bilangan hasil dari pemenggalan pertama dengan menghilangkan digit satuannya dan kemudian mengurangkan 2 kali nilai digit ini dari bilangan yang dipenggal
- Habis dibagi 11 jika dan hanya jika jumlah digit urutan ganjil dikurangi jumlah digit urutan genap habis dibagi 11

Sifat-sifat lain pada bilangan bulat

- Dapat dituliskan sebagai $pq + r$ dengan $0 \leq r < p$
- Setiap bilangan bulat dapat diubah kepada salah saru dari $3k, 3k + 1$ atau $3k + 2$
- Jika bilangan bulat berupa bilangan kuadrat sempurna(pangkat dua), maka
    a. Digit satuan akan berupa : 0,1,4,5,6 atau 9
    b. Bersisa 0 atau 1 jika dibagi 4
    c. Bersisa 0,1 atau 4 jika dibagi 5 atau 8
- Jika bilangan bulat berupa bilangan kubik(pangkat tiga) kalau dibagi 7 maka akan bersisa 0,1 atau 6

Contoh B.1

1)Jika diketahui $a + p.b = 19452005$ dengan a dan b keduanya bilangan ganjil serta diketahui $1945 \leq p \leq 2005$, maka banyaknya harga p bulat yang memenuhi persamaan tersebut adalah…

Jawab :

Diketahui $a + p.b = 19452005$ dan a dan b keduanya bilangan ganjil, pastilah nilai p genap dan batas p dari 1945 sampai 2005 sehingga yang mungkin dari p adalah : 1946,1948,1950,...,2002, 2004.

Jadi nilai p yang memenuhi ada sebanyak 30 bilangan genap dari 1945 sampai 2005

2)Jika diketahui p dan q adalah bilangan prima dan $p > q$ serta $p + q = 2005$, maka nilai $p - q$ adalah...

Jawab :

Dari soal diketahui $p + q = 2005$ dan p, q prima serta $p > q$, jelas bahwa diantara p dan q salah satunya harus genap dan yang lain ganjil. Bilangan prima yang genap Cuma ada satu yaitu 2, sehingga yang lain sisanya yaitu 2003 sehingga didapat $p = 2003$ dan $q = 2$

Jadi $p - q = 2003 - 2 = 2001$

3)Carilah bilangan prima terkecil yang membagi habis $19^{2004} + 45^{2005}$

Jawab :

Perhatikan bahwa

- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan $n \in$ bilangan ganjil
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan $n \in$ bilangan asli

Soal di atas kita arahkan ke sana, yaitu

$19^{2004} + 45^{2005} = 19^{2004} - 1^{2004} + 45^{2005} + 1^{2005} = (19 - 1)(19^{2003} + 19^{2002}.1 + 19^{2001}.1^2 + \cdots + 1^{2004}) + (45 + 1)(45^{2004} - 45^{2003}.1 + 45^{2002}.1^2 - \cdots - 1^{2004})$

Misalkan $m = 19^{2003} + 19^{2002}.1 + 19^{2001}.1^2 + \cdots + 1^{2004}$ dan $n = 45^{2004} - 45^{2003}.1 + 45^{2002}.1^2 - \cdots - 1^{2004}$, maka

$19^{2004} - 1^{2004} + 45^{2005} + 1^{2005} = 18m + 46n = 2(9m + 23n)$

Jadi bilangan prima terkecil yang membagi habis $19^{2004} + 45^{2005}$ adalah 2.

4) Dari 4 bilangan berikut : 5256, 7018, 18623, 32571, manakah yang habis dibagi 99?

Jawab :

Suatu bilangan habis dibagi 99, maka bilangan tersebut pasti memenuhi keterbagian 9 dan 11, sehingga dari 4 bilangan di atas, dapat kita cek misalkan

- Untuk 5256, $5+2+5+6=18$, jelas habis dibagi 9 karena 18 habis dibagi 9 dan $5-2+5-6=2$ jelas tidak memenuhi keterbagian 11, sehingga 5256 tidak habis dibagi 99
- Untuk 7018, $7+0+1+8=16$ (tidak memenuhi keterbagian 9) dan $7-0+1-8=0$ memenuhi keterbagian 11, sehingga 7018 tidak memenuhi keterbagian 99.
- Untuk 18623, dengan cara yang kurang lebih sama jelas tidak memenuhi keterbagian 99.
- Untuk 32571, $3+2+5+7+1=18$ (memenuhi keterbagian 9) dan $3-2+5-7+1=0$ (memenuhi keterbagian 11), sehingga 32571 memenuhi keterbagian 99.

Jadi yang memenuhi keterbagian 99 adalah 32571.

5)Bilangan asli terkecil yang jika dikalikan dengan 420 menghasilkan bilangan kuadrat sempurna

Jawab :

Perhatikan bahwa 420 = 10.42=2^2.3.5.7, sehingga bilangan asli terkecilnya adalah 3.5.7=105.

6)Jika $xyxz$ adalah bilangan 4 digit yang diperoleh dari pengkuadratan sebuah bilangan yang terdiri dari 2 digit. Dan jika dari masing-masing digitnya kita tambah 1, maka akan tetap merupakan bilangan hasil kuadrat dari 2 digit yang lain. Tentukan $x+y+z$

Jawab :

Kita perlu cara coba-coba untuk mendapatkan bilangan yang dimaksud

$31^2=961$ (bukan) , $32^2=1024$, berarti mulai 32 ke atas

- Untuk $40^2, 50^2, 60^2, 70^2, 80^2\ dan\ 90^2$ tidak ada yang memenuhi bentuk $xyxz$
- Untuk $45^2=2025, 55^2=3025, 65^2=4225, 75^2=5625, 85^2=7225, 95^2=9025$, ada satu saat $45^2=2025$. Jika 2025 kita perlakukan seperti pada soal di atas maka $(2+1)(0+1)(2+1)(5+1)=3136=56^2$ (bentuk ini memenuhi syarat seperti yang diuraikan soal di atas)
- Untuk bentuk yang lain, dari 32^2 sampai 99^2, misalkan $81^2=6561$. Kalau kita perlakukan sama maka $(6+1)(5+1)(6+1)(1+1)=7672$, bentuk ini bukan bilangan kuadrat.

Jadi $xyxz=2025$, sehingga $x+y+z=2+0+5=7$

7) Pasangan (x, n) dimana x bulat positif dan n memenuhi $x^2 + 615 = 2^n$

Jawab :

Perhatikan bahwa $x^2 + 615 = 2^n \Longrightarrow x^2 = 2^n - 615$, karena x bulat positif maka $n \geq 10$.

Kita gunakan cara coba-coba

- Untuk $n = 10$, maka $x^2 = 1024 - 615 = 409$ (tidak ada bilangan kuadrat yang memenuhi)
- Untuk $n = 11$, maka $x^2 = 2048 - 615 = 1433$ (tidak ada bilangan kuadrat yang memenuhi)
- Untuk $n = 12$, maka $x^2 = 4096 - 615 = 3481 = 59^2$
- Untuk yang lain silahkan coba cek sendiri

Jadi pasangan (x, n) yang dimaksud adalah $(59,12)$

2.Keterbagian

Pada operasi pembagian , jika c = a.b + r , 0≤r<b artinya; bilangan c dibagi bilangan a dengan hasil bagi bilangan b dan sisa pembagian r.

Jika c = a.b + r , dengan sisa r = 0, maka dikatakan **bilangan a membagi habis bilangan c dengan hasil bagi bilangan b dan ditulis a|c** , tetapi jika tidak habis dibagi maka ditulis a ∤ c.

Sifat-sifat keterbagian

- a|a berlaku untuk semua bilangan bulat a, syarat a ≠ 0
- 1|a berlaku untuk semua bilangan bulat a
- Jika a|b maka a|bc dengan c adalah bilangan bulat
- Jika a|b dan b|c maka a|c
- Jika a|b dan b|a maka a = ± b
- Jika a|b dan b ≠ 0 maka |a| ≤ |b|
- Jika a|b dan a|c maka a|(bp+cq) , dengan p, q ∈ bilangan bulat

Contoh B.2

1)Tunjukkan bahwa $6 \mid (a^3 - a)$ untuk $a \in \mathbb{Z}$

Jawab :

Perhatikan bahwa

$6 \mid (a^3 - a) = 6 \mid a(a^2 - a) = 6 \mid (a-1).a.(a+1)$, karena $(a-1).a.(a+1)$ adalah tiga bilangan berurutan maka akan habis dibagi 3! = 6.

Jadi terbukti

2)(OSK 2002) Tentukan banyaknya pasangan bulat positif (x, y) yang memenuhi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

Jawab :

Persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ ekuivalen dengan $6x + 6y = xy \Longrightarrow xy - 6x - 6y + 36 = 36$

$$\Leftrightarrow (x-6)(y-6) = 36$$

$$36 = (1.36) = (36.1) = (2.18) = (18.2) = (3.12) = (12.3) = (4.9) = (9.4) = (6.6)$$

Jadi ada Sembilan pasangan yang memenuhi syarat.

3)(OSK 2003)Jika x dan y adalah bilangan bulat yang memenuhi $x^2 - y^2 = 2003$, maka $x^2 + y^2 = \dots$

(ingat 2003 adalah bilangan prima)

Jawab :

Diketahui $x^2 - y^2 = 2003$, jelas bahwa $x > y$,

maka $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 2003 = 2003.1$

Selanjutnya dari data tersebut kita mendapatkan

$$x + y = 2003 \; dan \; x - y = 1$$

Denga eliminasi-substitusi kita mendapatkan $x = 1002$ dan $y = 1001$ dan nilai

$$x^2 + y^2 = 1002^2 + 1001^2 = 1004004 + 1002001 = 2006005$$

Jadi nilai $x^2 + y^2 = 2006005$

4)Tunjukkan bahwa jika $a > 3$ bilangan prima maka $24 \mid a^2 - 1$

Jawab :

Alternatif 1:

Karena $a > 3$ prima maka $a \pm 1$ genap, yang satunya habis dibagi 2 dan yang satunya lagi habis dibagi 4, sehingga $8 \mid a^2 - 1$ ....1)

Dan jika bentuknya $a - 1, a, a + 1$ maka salah satunya dapat dibagi 3. karena $a > 3$ dan a prima maka sebagai akibatnya $3 \nmid a$ tetapi $3 \mid (a-1)(a+1)$ atau $3 \mid a^2 - 1$ ....2)

Karena 3 dan 8 relatif prima, maka berdasarkan 1) dan 2) didapatkan $24 \mid a^2 - 1$.

Alternatif 2:

Dari soal diketahui $a = 4,5,6,7,8, \ldots$, kita ambil $a^2 \geq 24$, yaitu $a = 6$.

Misalkan $a = 6m \pm 1$ (lihat bahasan selanjutnya tentang bilangan prima), $m \in \mathbb{N} \Longrightarrow a^2 = 36m^2 \pm 12m + 1 \Longrightarrow a^2 - 1 = 12m(3m \pm 1)$. Jelas bahwa untuk nilai $m \in \mathbb{N}$ pasti $a^2 - 1$ habis dibagi 24 atau $24 \mid a^2 - 1$

Jadi terbukti bahwa jika $a > 3$ maka $24 \mid a^2 - 1$

3.FPB, KPK, Relatif Prima dan Algoritma Euclid

3.1.FPB(GCD), KPK(LCM) dan Realtif Prima

- FPB adalah faktor persekutuan terbesar. Jika sembarang bilangan bulat a ,b , dan d dimana d|a dan d|b maka d adalah pembagi terbesar GCD(**Greatest Common Divisor**) dari a dan b.
- Jika a|b dan FPB keduanya adalah 1, maka a dan b dikatakan relatif prima(coprim)
- KPK adalah kelipatan persekutuan terkecil LCM(**Least Common Multiple**)
- FPB(a, b).KPK(a, b) = $a.b$

3.2.Algoritma Euclid

Teorema Algoritma Euclid

Jika diberikan dua bilangan bulat *a* dan *b* dengan 0 < *b* < *a*, maka GCD(*a, b*) dapat dicari dengan algoritma pembagian

$a = q_1 b + r_1 \qquad 0 < r_1 < b$

$b = q_2 r_1 + r_2 \qquad 0 < r_2 < r_1$

$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \qquad 0 < r_3 < r_2$

$\vdots$

$r_{n-2} = q_2 r_{n-1} + r_n \qquad 0 < r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0$

Contoh B.3

1)Tentukan FPB(GCD) dari 32 dan 2012

Jawab :

Alternatif 1:

Baik 4│32 atau 4 x 8 = 32dan 4│2012 atau 4 x 503 = 2012 dan 503 adalah prima.

Jadi GCD dari 32 dan 2012 adalah 4

Alternatif 2:

Dengan Algoritma Euclid:

GCD(2012 , 32) ⟹ 2012=62 x 32 + 28

32 = 1 x 28 +4

28 = 7 x 4 + 0

Jadi GCD(2012 , 32) = 4

2)(IMO 1959)Buktikan bahwa untuk $n \in \mathbb{N}$, pecahan $\frac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan

Jawab :

Perhatikan bahwa pecahan $\frac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan artinya pembilang dan penyebutnya relatif prima, maka GCD$(21n+4, 14n+3)$=1. Sehingga ada bilangan a dan b yang memenuhi

$$(21n+4)a + (14n+3)b = 1$$

$$\Leftrightarrow 7n(3a+2b) + (4a+3b) = 1$$

Supaya memenuhi untuk setiap n maka haruslah

$3a + 2b = 0 \ |x3| \ \ 9a + 6b = 0$

$4a + 3b = 1 \; |x2| \;\; 8a + 6b = 2 \quad -$

$a = -2$ dan $b = 3$

Jadi, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka pecahan $\frac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan

3)Jika ada 12 pisang goreng, 24 tahu baksao goreng dan 18 mendoan, maka berapa banyak piring harus disiapkan agar dalam penyajian tiap satu piring berisi maksimum dan jumlahnya sama?

Catatan : setiap piring boleh diisi makanan berbeda

Jawab :

Diketahui, tersedia jenis makanan

- 12 pisang goreng
- 24 bakso isi goreng
- 18 mendoan

GCD dari(12,24,18) = 6, jadi piring yang perlu disiapkan ada sebanyak 6 buah

4)Tentukan KPK dari 213 dan 2013

Jawab :

Perhatikan bahwa

FPB(213,2013).KPK(213,2013)=213.2013

3.KPK(213,2013) $= 142923$

KPK(213,2013) $= \frac{428769}{3} = 142923$

Jadi, KPK dari 213 dan 2013 adalah 142923

4.Konversi Bilangan dan kongruensi (Modulo)

4.1.Penyajian Bilangan Basis 10

4.1.1.Bentuk Umum

Sebuah bilangan asli dapat disajikan

$$a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + a_{k-2} 10^{k-2} + \cdots + a_0$$

dengan :

- Bilangan 10 disebut basis
- k adalah indeks dan digunakan sebagai nomor
- $a < a_k \leq 9$, dengan k bilangan asli
- $0 \leq a_i \leq 9$, untuk $i = 0, 1, 2, 3, \dots, k-1$

Perhatikan contoh berikut

$$2013 = 2.10^3 + 0.10^2 + 1.10 + 3$$

dengan

- $k = 3$
- $a_k = a_3 = 2$, $a_{k-1} = a_2 = 0$, $a_{k-2} = a_1 = 1$ dan $a_0 = 3$

4.1.2.Penyajian bilangan dengan basis lain

Untuk p bilangan asli, maka setiap bilangan asli n dapat disajikan dalam bentuk

$$n = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots + a_0 = (a_k a_{k-1} \dots a_0)_p$$

Dengan

- $k, a_k, a_{k-1}, \dots, a_0$ bilangan bulat, $k \geq 0$
- $0 < a_k < p$ dan $0 \leq a_i < p$

4.1.3.Sistem bilangan basis

Sistem	angka terbesar
Biner(basis 2)	1
Oktal(basis 8)	7
Desimal(basis 10)	9

Contoh B.4

1)Tuliskan bilangan

$$125 = 1.10^2 + 2.10 + 5$$

dalam basis 2

Jawab :

$$125 = 62.2 + 1$$

$$125 = (31.2 + 0).2 + 1$$

$$125 = 31.2^2 + 0.2 + 1$$

$$125 = (15.2 + 1).2^2 + 0.2 + 1$$

$$125 = 15.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1$$

$$125 = (7.2 + 1).2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1$$

$$125 = 7.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1$$

$$125 = (3.2 + 1).2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1$$

$$125 = 3.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1$$

$$125 = (1.2 + 1).2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1$$

$$125 = 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1$$

Jadi 125 dalam basis 2 ditulis sebagai $(1111101)_2$

2)Tentukan jumlah dari

a) $1_2 + 1_2$
b) $101_2 + 110_2$
c) $11_2 + 11_2$
d) $111_3 + 222_3$
e) $333_6 + 12345_6$
f) $2013_5 + 2014_5$

Jawab :

a) $1_2 + 1_2 = 10_2$
b) $101_2 + 110_2 = (1011)_2$, setiap penjumlahan yang menghasilkan bilangan yang sama dengan basisnya dianggap 0
c) $11_2 + 11_2 = 110_2$

d) $111_3 + 222_3 = 1110_3$
e) $333_6 + 12345_6 = 13122_6$
f) $2013_5 + 2014_5 = 4032_5$

3)Berapakah nilai $a + b + c$, jika

$$(abc)_8 = (2013)_4$$

Jawab :

Untuk menyelesaiakn masalah di atas ubahlah salah yang diketahui ke basis 10.

Perhatikan bahwa $(2013)_4 = 2.4^3 + 0.4^2 + 1.4 + 3 = 2.64 + 4 + 3 = 135$. Sehingga

$$135 = 16.8 + 7 = (2.8 + 0)8 + 7 = 2.8^2 + 0.8 + 7 = 207_8$$

Maka
$(abc)_8 = (2013)_4 = 207_8$, a = 2, b = 0 dan c = 7

Jadi nilai $a + b + c = 2 + 0 + 7 = 9$

4)Tentukan nilai basis x yang memenuhi $73 = 111_x$

Jawab :

Dari soal diketahui bahwa $111_x = 73$,maka

$$1.x^2 + 1.x + 1 = 73$$

$$x^2 + x - 72 = 0$$

$$(x + 9)(x - 8) = 0$$

$$x = -9(tidak\ memenuhi)\ V\ x = 8$$

Jadi nilai bais $x = 8$

4.2.Definisi Kongruensi(Modulo)

Misalkan diberikan a, b dan m adalah bilangan bulat dengan $m > 0$.

a dikatakan kongruen dengan b modulo m jika $m|(a - b)$ dan dituliskan sebagai

$$a \equiv b\ (mod\ m)$$

4.3.Sifat-Sifat yang Berlaku pada Operasi Modulo

Jika a, b, c, d dan m bilangan bulat dengan $d, m > 0$, maka

- $a \equiv 0 \ (mod\ m)$, berarti $m|a$, atau a dibagi habis oleh m
- $a \equiv a \ (mod\ m)$
- Jika $a \equiv b \ (mod\ m)$, maka $b \equiv a \ (mod\ m)$
- Jika $a \equiv b \ (mod\ m)$ dan $b \equiv c \ (mod\ m)$, maka $a \equiv c \ (mod\ m)$
- $a + b \equiv a + c \ (mod\ m)$
- $ac \equiv bc \ (mod\ m)$
- Jika $a \equiv b \ (mod\ m)$ dan $c \equiv d \ (mod\ m)$ maka
    a. $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$
    b. $ac \equiv bd \ (mod\ m)$
    c. $a^2 \equiv b^2 \ (mod\ m)$
    d. $a^k \equiv b^k \ (mod\ m)$, dengan $k \in Bilangan\ bulat\ positif$
    e. $f(a) \equiv f(b) \ (mod\ m)$,dengan
    $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$
- $(am + b)^k \equiv b^k \ (mod\ m)$ untuk $k \in \mathbb{N}$
- **The Chinese Remainder Theorem**
  Jika , ada
  $n \equiv n_1 \ (mod\ m_1)$
  $n \equiv n_2 \ (mod\ m_2)$
  $n \equiv n_3 \ (mod\ m_3)$
  dst
  $n \equiv n_k \ (mod\ m_k)$
  Dimana $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ dan $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ adalah relatif prima(coprim), maka akan ada solusi unik untuk penyelesaian $mod(m_1.m_2.m_3 \dots m_k)$ tersebut
- **Theorema kecil Fermat/Fermat's Little Theorem(FLT)**
  $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$, dengan $p \in$ Bilangan Prima dan $p \nmid a$
- **Teorema Wilson**
  $(p-1)! \equiv -1 \ (mod\ p)$, dengan $p \in$ Bilangan Prima

Contoh B.5

1)(OSK 2011) Jika m dibagi 5 bersisa 3 dan n dibagi 5 bersisa 2, maka mn jika dibagi 5 bersisa

Jawab :

Diketahui m dibagi 5 bersisa 3 dan n dibagi 5 bersisa 2, kalau ditulis dalam bentuk modulo menjadi

- $m \equiv 3 \ (mod\ 5)$
- $n \ \equiv 2 \ (mod\ 5)$

maka $mn \equiv 3.2 \ (mod\ 5) \Longrightarrow mn \equiv 6 \ (mod\ 5)$

Sehingga $mn \equiv 1 \ (mod\ 5)$

Jadi pembagian mn oleh 5 akan bersisa 1

2)Tentukan sisa pembagian dari 3^{2013} jika dibagi 8

Jawab :

$3^{2013} \equiv 3^{2\ x\ 1006+1} \ (mod\ 8)$

$\equiv (9)^{1006}.3 \ (mod\ 8)$

$\equiv \ 1^{1006}.3 \ (mod\ 8)$

$\equiv 3 \ (mod\ 8)$

Jadi sisa pembagiannya adalah 3

3)Tunjukkan bahwa 13 membagi habis $2^{70} + 3^{70}$

Jawab :

Misalkan kita partisi sebagai berikut :

- $2^{70} \equiv (2^7)^{10} \ (mod\ 13)$
  $\equiv 128^{10} \ (mod\ 13)$
  $\equiv (9.13 + 11)^{10} \ (mod\ 13)$
  $\equiv (11)^{2.5} \ (mod\ 13)$
  $\equiv (9.13 + 4)^5 (mod\ 13)$
  $\equiv 4^5 \ (mod\ 13)$
  $\equiv 1025 \ (mod\ 13)$
  $\equiv \ (78.13 + 10) \ (mod\ 13)$
- $3^{70} \equiv 3^{3.23+1} \ (mod\ 13)$
  $\equiv (3^3)^{23}.3 \ (mod\ 13)$
  $\equiv 27^{23}.3 \ (mod\ 13)$
  $\equiv \ (2.13 + 1)^{23}.3 \ (mod\ 13)$
  $\equiv 1^{23}.3 \ (mod\ 13)$
  $\equiv 3 \ (mod\ 13)$

Sehingga

$2^{70} + 3^{70} \equiv (10 \ (mod\ 13)) + (3 \ (mod\ 13)) \equiv (10 + 3) \ (mod\ 13) \ \equiv 0 \ (mod\ 13)$

Jadi $2^{70} + 3^{70}$ habis dibagi 13.

4)Tunjukkan bahwa $2^{2k+1} + 1$ habis dibagi 3

Jawab :

Perhatikan bahwa $2^{2k+1} + 1 = 2.2^{2k} + 1 = (3-1).2^{2k} + 1 = 3.2^{2k} + 1 - 2^{2k}$

Untuk $\underbrace{1 - 2^{2k}}_{berupa\ bilangan\ negatif\ kelipatan\ 3\ ,k\in\mathbb{N}}$

Misalkan

k	1	2	3	4	5
$1 - 2^{2k}$	-3	-15	-63	-255	-1023

Ternyata semuanya kelipatan 3 dalam bentuk bilangan bulat negatif

Sehingga $2^{2k+1} + 1 \equiv (3.2^{2k} + 1 - 2^{2k})\ (mod\ 3) \equiv 0\ (mod\ 3)$

Jadi, benar bahwa $2^{2k+1} + 1$ habis dibagi 3

5)Tentukan 3 angka terakhir dari 7^{999}

Jawab :

Perhatikan bahwa maksud soal berarti berapakah sisa pembagian 7^{999} oleh 1000

maka $7^{999} \equiv 7^{4.249+3}\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv (7^4)^{249}.7^3\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 2401^{249}.343\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 401^{249}.343\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 401^{4.62+1}.343\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv (401^4)^{62}.401.343\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv (25989131801)^{62}.(137543)\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 801^{62}.543\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 801^{2.31}.543\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv (801^2)^{31}.543\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 641601^{31}.543\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 601^{31}.543\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 601^{4.7+3}.543\ \ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv (601^4)^7.601^{2+1}.543\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv (130466162401)^7.(361201)(601)(543)\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv (130466162401)^7.(361201)(325343)\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 401^7.201.343\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 401^{2.3+1}.68943\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv (401^2)^3.401.943\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 160801^3.374534\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 801^3.534\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 801^{2+1}.534\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 801^2.801.534\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 641601.427734\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 601.734\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 441134\ (mod\ 1000)$

$7^{999} \equiv 134\ (mod\ 1000)$

Jadi 3 digit terakhir dari 7^{999} adalah 134

6)Tunjukkan bahwa jika $n > 1$ sehingga $2^n + n^2$merupakan bilangan prima, maka $n \equiv 3\ (mod\ 6)$

Jawab :

Perhatikan bahwa $n > 1$ dan supaya $2^n + n^2$prima, maka n haruslah ganjil, perhatikan ilustrasi berikut

n	3	5	7	9	...
$2^n + n^2$	17	57,bukan prima	177, bukan prima	593	...

Dari hasil ilustrasi tabel di atas terlihat bahwa saat $2^n + n^2$ prima, maka $n \equiv 3 \ (mod\ 6)$ adalah benar(lihat tabel bilangan prima pada halaman terakhir)

Jadi, terbukti

7)(OSK 2011)Tentukan bilangan asli terkecil yang lebih dari 2011 yang berisa 1 jika dibagi 2,3,4,5,6,7,8,9,10

Jawab :

Misalkan bilangan itu n, maka

$n \equiv 1 \ (mod\ 2)$ $n \equiv 1 \ (mod\ 6)$ $n \equiv 1 \ (mod\ 10)$

$n \equiv 1 \ (mod\ 3)$ $n \equiv 1 \ (mod\ 7)$

$n \equiv 1 \ (mod\ 4)$ $n \equiv 1 \ (mod\ 8)$

$n \equiv 1 \ (mod\ 5)$ $n \equiv 1 \ (mod\ 9)$

Untuk menyelesaikan persoalan tersebut kita dapat menggunakan The Chinese Remainder Theorem. Pada bilangan 2,3,4,5,6,7,8,9 dan 10 , maka **LCM(KPK)** dari 2,3,4,5,6,7,8,9 dan 10 adalah 5.7.8.9 = 2520

Maka soal di atas dapat disederhanakan menajdi $n \equiv 1 \ (mod\ 2520)$, atau $n = 2520k + 1$, dengan $k \in \mathbb{N}$. Sehingga supaya $n > 2011$, ambil $k = 1$, maka akan kita dapatkan $n = 2521$

Jadi, n terkecil dimana $n > 2011$ adalah 2521

8) Tunjukkan bahwa $n^7 \equiv n \ (mod\ 42)$, untuk $n \in \mathbb{N}$

Jawab :

Perhatikan bahwa 42 = 2.3.7

Selanjutnya berdasarkan Teorema kecil Fermat

$$n^{k-1} - 1 \equiv 0 \ (mod\ k) \ \ atau \ \ n^k - n \equiv 0 \ (mod\ k)$$

untuk $k = 2{,}3 \ dan \ 7$

Perhatikan pula bahwa

$$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 + 1)(n^3 - 1)$$

$$n^7 - n \equiv 0 \ (mod\ 2.3.7)$$

$$n^7 - n \equiv 0 \ (mod\ 42)$$

Jadi, terbukti bahwa $n^7 \equiv n \ (mod\ 42)$, untuk $n \in \mathbb{N}$

5.Bilangan Prima

Tentang Bilangan Prima

- Bilangan prima adalah bilangan asli yang habis dibagi oleh 1 dan bilangan itu sendiri
- Jika x bilangan prima maka sebarang bilangan asli n berlaku $x|n$ atau FPB(x, n) = 1
- Bilangan prima adalah bilangan asli yang memiliki dua faktor(Basit)
- Jika x bilangan prima membagi n^2 untuk $n \in \mathbb{N}$, maka $x|n$
- Jika $x|ab$ untuk $a, b \in \mathbb{N}$, maka $x|a$ atau $x|b$
- Untuk semua bilangan prima $x > 3$ akan berlaku $6n \pm 1$, dengan $n \in \mathbb{N}$
- $\pi(x)$ adalah ungkapan untuk banyaknya bilangan Prima yang tidak lebih dari x
  Contoh :
    a. $\pi(10)$ = 4 ,yaitu : 2, 3, 5, dan 7
    b. $\pi(100) = 25$

       Yaitu : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, dan 97.
       Sekilas bilangan prima di atas 100, dapat anda cari secara manual dengan bantuan 25 bilangan prima di atas

    c. $\pi(1000) = 168$
       Lihat tabel di halaman akhir
    d. $\pi(10000) = 1229$
    e. $\pi(10^8) = 5761455$
    f. $\pi(10^9) = 50847534$
    g. $\pi(10^{10}) = 455052512$
- Semua bilangan prima ganjil kecuali 2
- Dua bilangan prima dianggap kembar jika berupa 2 bilangan ganjil yang berurutan dan keduanya prima

6.Faktorisasi Prima/ Penguraian Prima

- Setiap bilangan asli yang lebih dari 1, dapat difaktorkan menjadi hasil kali bilangan-bilangan prima
  Contoh 4 = 2 x 2 = 2^2 , 40 = 2^3 x 5
  Lihat tabel di halaman akhir
- Untuk setiap bilangan asli n,
  jika n memiliki penguraian prima degan $n = {p_1}^{n_1}.{p_2}^{n_2}.{p_3}^{n_3}\dots{p_k}^{n_k}$ dengan $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ adalah kumpulan bilangan prima yang berbeda, maka banyaknya pembagi berbeda dari n adalah
  $\tau(n) = (n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1)\dots(n_k + 1)$
- jika n memiliki penguraian prima degan $n = {p_1}^{n_1}.{p_2}^{n_2}.{p_3}^{n_3}\dots{p_k}^{n_k}$ dengan $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ adalah kumpulan bilangan prima yang berbeda, maka banyaknya cara berbeda memfaktorkan n adalah
  $\frac{1}{2}\tau(n) = \frac{1}{2}(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1)\dots(n_k + 1)$
- (**Topik Eratothenes**)
  Jika n bilangan *majmuk* (komposit), maka n akan memiliki faktor prima p dengan $p \le \sqrt{n}$
  (Bilangan majmuk/komposit adalah bilangan asli yang memiliki faktor lebih dari 2, sebagai contoh : 4,6,8,9,10,12,14, …)

Contoh B.6

1)(OSP 2006) Bilangan prima yang terdiri 2 digit terbesar yang merupakan jumlah dari 2 bilangan prima lainnya adalah…

Jawab :

Dari soal jelas jumlah 2 bilangan prima yang berbeda menghasilkan bilangan prima yang lain, pastilah salah satu dari 2 bilangan itu genap, yaitu 2. Dan supaya 2 kalau dijumlahkan ke suatu bilangan prima menghasilkan bilangan prima yang lain maka bilangan itu adalah 73, karena 2 +71 = 73

2)(OSK 2008) Carilah banyaknya faktor positif dari 5!

Jawab :

Perhatikan bahwa

5! = 1.2.3.4.5=120=$2^3.3^1.5^1$, maka banyaknya faktor positif adalah $(3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$

3) Untuk soal no.2)Berapakah banyaknya cara berbeda memfaktorkannya dan tunjukkan!

Jawab :

5! = 120 , kalau banyaknya faktor positif ada 16, maka banyaknya cara mefaktorkannya ada sebanyak $= \frac{banyak\ faktor\ positif}{2} = \frac{16}{2} = 8$

Yaitu 1.120, 2.60, 3.40, 4.30, 5.24, 6.20, 8.15,10.12

4)tentukan apakah bilangan berikut majmuk atau prima

a) 2003 b) 2013

Jawab :

a) Banyaknya bilangan prima yang $\leq \sqrt{2003}$ adalah 2, 3, 5 , 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 .lihat materi keterbagian, maka tidak ada bilangan prima tersebut yang dapat membagi 2003, sehingga 2003 merupakan bilangan prima

b) Banyaknya bilangan prima yang $\leq \sqrt{2013}$ adalah 2, 3, 5 , 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. Karena ada salah satu dari bilangan prima yang membagi 2013, misal $3 \mid 2013,\ 11 \mid 2013$ maka 2013 bukan bilangan prima

7.Persamaan bilangan Bulat

7.1.**Persamaan linier untuk Kongruensi**

- Jika $ax \equiv b\ (mod\ m)$ memiliki solusi x_0, maka $x_0 + km$ juga merupakan solusi
- Jika $ax \equiv b\ (mod\ p)$, dengan p bilangan prima, maka persamaan tersebut akan selalu memiliki solusi
- Lihat kembali tentang **The Chinese Remainder Theorem**
  Jika $GCD(m_1, m_2) = 1$, maka persamaan $x \equiv a_1\ (mod\ m_1)$ dan $x \equiv a_2\ (mod\ m_2)$ akan memiliki solusi $m_1 m_2$ dengan sebarang a_1 dan a_2
- Lihat juga **Teorema Kecil Fermat** dan **Teorema Wilson**

Contoh B.7

1)Tentukan jawaban untuk

a) $5x \equiv 4\ (mod\ 11)$
b) $3x \equiv 7\ (mod\ 17)$
c) $9x\ \equiv 4\ (mod\ 49)$
d) $100x \equiv 7\ (mod\ 11^2)$

Jawab :

a)Untuk $5x \equiv 4\ (mod\ 11)$, GCD(11,5) = 1, maka akan ada bilangan bulat m dan n sehingga $5m + 11n = 1$, maka kita cari bilangan tersebut.

Dengan Algoritma Pembagian, diperoleh

$11 = 2.5 + 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 11 - 2,5$

$2 = 2.1 \quad\quad 5.(-2) = 1 - 11$ (masing-masing ruas dikalikan dengan 4)

$5.(-8) = 4 - 4.11$ (lihat 4 merupakan sisa seperti pada soal)

$x = (-8) + 11r$ atau (karena kelipatan 11)

$x = 3 + 11r$

Jadi jawab untuk $5x \equiv 4 \ (mod\ 11)$ adalah $x \equiv 3 \ (mod\ 11)$

b)Untuk $3x \equiv 7 \ (mod\ 17)$, GCD(17,3) = 1, maka akan ada bilangan bulat m dan n sehingga $3m + 17n = 1$, maka kita cari bilangan tersebut.

Dengan Algoritma Pembagian, diperoleh

$17 = 5.3 + 2$

$3 = 1.2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 3 - 1.2$

$2 = 2.1 \quad\quad = 3 - 1.(17 - 5.3)$

$= 6.3 - 1.17$

$3.6 = 1 + 1.17$ (masing-masing ruas kalikan dengan 7)

$3.42 = 7 + 7.17$ (telah mirip dengan bentuk soal di atas)

$x = 42 + 17r = 2.17 + 8 + 17r = 8 + 17(r + 2)$

Jadi jawab untuk $3x \equiv 7 \ (mod\ 17)$ adalah $x \equiv 8 \ (mod\ 17)$

c) Silahkan selesaikan sendiri, jawab soal ini adalah $x \equiv 24 \ (mod\ 49)$

d) Silahkan selesaikan sendiri juga, jawab soal ini adalah $x \equiv 40 \ (mod\ 121)$

2) Penyelesaian untuk $x \equiv 1 \ (mod\ 2)$ dan $x \equiv 2 \ (mod\ 3)$ adalah…

Jawab :

Jawab persamaan pertama $x \equiv 1 + 2y$, dengan $y \in \mathbb{Z}$. Jawab ini menjadi jawaban yang kedua yaitu $1 + 2y \equiv 2\ (mod\ 3) \Longrightarrow 2y \equiv 1\ (mod\ 3)$. Karena GCD(3,2)=1 maka akan ada bilangan bulat m dan n sehingga $2m + 3n = 1$, maka kita cari bilangan tersebut.

Mudah ditebak bahwa $m = -1$ dan $n = 1$, sehingga $y = 2\ (mod\ 3)$ atau $y = 2 + 3k$ dengan $k \in \mathbb{Z}$, adalah jawabnya.

Kemudian hasil tersebut kita kita substitusikan pada hasil yang awal di atas, yaitu

$$x = 1 + 2y$$

$$= 1 + 2(2 + 3k) = 1 + 4 + 6k = 5 + 6k \text{ dengan } k \in \mathbb{Z}$$

Jadi, solusinya adalah $x \equiv 5\ (mod\ 6)$

7.2.Persamaan Diophantine

7.2.1.Teorema Diophantine :

Suatu persamaan linier Diophantine $ax + by = c$ dengan $a, b, c \in \mathbb{Z}$ akan memiliki solusi bulat jika dan hanya jika GCD(a, b) membagi habis c

7.2.2.Persamaan Linear Diophantine

- Diambil $k \in \mathbb{Z}$, akan ditunjukkan bahwa jika salah satu penyelesaian persamaan linier Diophantine $ac + by = c$ adalah x_0 dan y_0, maka
$$\boldsymbol{x = x_0 + \left(\frac{b}{GCD(a,b)}\right)k}$$
$$\boldsymbol{y = y_0 - \left(\frac{a}{GCD(a,b)}\right)k}$$
Juga termasuk penyelesaian persamaan linear Diophantine tersebut.
- Penyelesaian-penyelesaian dari sebuah persamaan yang berasal dari himpunan bilangan bulat($\mathbb{Z}$) sebenarnya secara tidak langsung kita menggunakan sebuah persamaan Dhiophantine

Contoh B.8

1)Carilah penyelesaian umum untuk persamaan Diophantine $738x + 621y = 45$

Jawab :

Langkah pertama, kita tentukan dulu GCD(738,621) dengan Algoritma Euclid, yaitu:

738 = 1.621 + 117

621 = 5.117 + 36

117 = 3.36 + 9

36 = 4.9

Sehingga diperoleh GCD(738,621) = 9 dan $9 \mid 45$ maka persamaan di atas memiliki penyelesaian pada bilangan bulat

Perhatikan $9 = 117 - 3.36$

$$9 = 117 - 3.(621 - 5.117)$$

$$9 = 16.117 - 3.621$$

$$9 = 16.(738 - 1.621) - 3.621$$

$$9 = 16.738 - 19.621$$

Kalikan masing-masing ruas dengan 5, sehingga menjadi

$$45 = 80.738 - 95.621$$

Sampai langkah di sini kita mendapatkan $x_0 = 80$ dan $y_0 = -95$

Sehingga

$\boldsymbol{x = x_0 + \left(\frac{b}{GCD(a,b)}\right)k \Rightarrow x = 80 + \frac{621}{9}k \quad \Rightarrow x = 80 + 69k}$

$\boldsymbol{y = y_0 - \left(\frac{a}{GCD(a,b)}\right)k \Rightarrow x = -95 - \frac{738}{9}k \Rightarrow x = -95 - 82k}$

2)(OSK 2010) Tentukan semua pasangan (x, y) bilangan asli($\mathbb{N}$) sehingga $2x + 5y = 2010$

Jawab :

2x + 5y = 2010

5y = 2010 – 2x

$y = 402 - \frac{2}{5}x$

Misalkan untuk $x = 5p$ dengan $p \in \mathbb{N}$, maka

$y = 402 - 2p$, sehingga diperoleh fakta

$$(x, y) = (5p, 402 - 2p)$$

Jelas bahwa ada sebanyak 200 pasangan (x, y) bilangan asli($\mathbb{N}$)

3)Perhatikan kembali **Contoh B.2**

(OSK 2002) Tentukan banyaknya pasangan bulat positif (x, y) yang memenuhi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

Jawab :

Perhatikan bahwa $x, y > 0$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6x + 6y = xy \Leftrightarrow xy - 6y = 6x \Leftrightarrow y = \frac{6x}{x-6} \Leftrightarrow y = \frac{6(x-6)+36}{x-6}$$

Sehingga $y = 6 + \frac{36}{x-6}$ dan supaya x, y bulat positif, maka $x, y \geq 1$. Karena $x, y \geq 1$, maka $x - 6$ haruslah faktor dari 36, yaitu : 1,2,3,4,6,9,12,18,36.

Untuk pasangan yang terjadi adalah
(7,42),(8,24),(9,18),(10,15),(12,12),(15,10),(18,9),(24,8) dan (42,7)

Jadi ada 9 pasangan yang sesuai pertanyaan di atas.

4)Tentukan banyaknya solusi pasangan bulat positif (x, y) yang memenuhi $\frac{1}{3x} + \frac{1}{11y} = \frac{1}{2013}$

Jawab :

Perhatikan bahwa $x, y > 0$

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{11y} = \frac{1}{2013}$$

$$\frac{3x+11y}{33xy} = \frac{1}{2013} \Leftrightarrow \frac{3x+11y}{xy} = \frac{1}{61} \Leftrightarrow 183x + 671y = xy \Leftrightarrow xy - 671y = 183x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{183x}{x-671} \Leftrightarrow y = \frac{183(y-671)+122793}{x-671} \Leftrightarrow y = 183 + \frac{122793}{x-671}$$

Sehingga $y = 183 + \frac{122793}{x-671}$ dan supaya x, y bulat positif, maka $x, y \geq 1$. Karena $x, y \geq 1$, maka $x - 671$ haruslah faktor dari 122793, yaitu :
1,3,11,33,61,183,671,2013,3721,11163,40931 dan 122793.

Jadi ada 12 pasangan x, y bulat positif

8.Fungsi Tangga/Fungsi bilangan Bulat Terbesar dan Fungsi Ceiling

8.1.Pengertian Fungsi Tangga(Floor)

- $\lfloor x \rfloor$ atau kadang dituliskan sebagi $[x]$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari x

8.2.Formula-Formula Penting

untuk fungsi tangga dimana $a, b \in \mathbb{R}$, maka :

- $\lfloor a \rfloor \leq a$
- $0 \leq a - \lfloor a \rfloor < 1$
- $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$
- $\lfloor a + q \rfloor = \lfloor a \rfloor + q$, dengan $q \in \mathbb{Z}$
- $\lfloor a + b \rfloor \geq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$
- $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \lfloor a \rfloor$
- $\lfloor a \rfloor + \left\lfloor a + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor a + \frac{2}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor a + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor na \rfloor$, dimana $n \in \mathbb{N}$
- $\left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor$, dimana $n, k \in \mathbb{N}\ dan\ k > 1$
- $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$, dengan $p, q \in \mathbb{Z}$ dan p, q saling prima
- $\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_n$, dengan τ_k adalah banyaknya pembagi bilangan k
- $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots = a$, dengan p prima dan $n \in \mathbb{N}$ serta $n = p^a r$ dengan kenyataan $p \text{ dan } r$ saling prima atau dengan kata lain nilai terbesar dari a sebagai pangkat dari p dapat ditentukan. Rumus ini sering digunakan pada bilangan" n! " (n faktorial)

8.3.Pengertian Fungsi Ceiling

- Kebalikan dari fungsi tangga
- Lambang $\lceil x \rceil$, dan $\lceil x \rceil$ adalah Bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan x
- $\{x\}$ adalah untuk menyatakan bagian pecahan dari x
- $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$

8.4.Formula-Formula

- $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$
- $x = \lceil x \rceil + \{x\} - 1$
- $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$

Contoh B.9

1)(OSK 2007)Bila k adalah bilangan asli sehingga 3^k adalah faktor dari 33!, tentukan nilai terbesar dari k

Jawab :

Untuk k terbesar = $\left\lfloor\frac{33}{3^1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{33}{3^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{33}{3^3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{33}{3^4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{33}{3^5}\right\rfloor + \cdots = 11 + 3 + 1 + 0 + 0 + \cdots$ = 15

2)(OSP 2009) Berapa banyak nol di bagian paling kanan pada representasi 100!

Jawab :

Banyak nol = $\left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{5^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{5^3}\right\rfloor + \cdots = 20 + 4 + 0 + \cdots = 24$

3)(AIME 1994) Tentukan bilangan asli n,sehingga $\left\lfloor {}^2\log 1\right\rfloor + \left\lfloor {}^2\log 2\right\rfloor + \left\lfloor {}^2\log 3\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor {}^2\log n\right\rfloor = 1994$

Jawab :

Perhatikan bahwa nilai untuk ${}^2\log 1 = \mathbf{0}$

${}^2\log 2 = \mathbf{1}$, ${}^2\log 3 = \mathbf{1}, \ldots$, maka nilai untuk

$\left\lfloor {}^2\log 1\right\rfloor = 0$	$\left\lfloor {}^2\log 6\right\rfloor = 2$
$\left\lfloor {}^2\log 2\right\rfloor = 1$	$\left\lfloor {}^2\log 7\right\rfloor = 2$
$\left\lfloor {}^2\log 3\right\rfloor = 1$	$\left\lfloor {}^2\log 8\right\rfloor = 3$
$\left\lfloor {}^2\log 4\right\rfloor = 2$	$\left\lfloor {}^2\log 9\right\rfloor = 3$
$\left\lfloor {}^2\log 5\right\rfloor = 2$	$\left\lfloor {}^2\log 10\right\rfloor = 3$

Sehingga, jika kita urutkan supaya jumlahnya 1994 adalah $n = 312$, yaitu

$0 + 1(ada\ 2) + 2(ada\ 4) + 3(ada\ 8) + 4(ada\ 16) + 5(ada\ 32) + 6(ada\ 64) + 7(ada\ 128) + 8(cukup\ 57\ saja) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 57 = 312$

4)Hitunglah nilai $\left\lfloor \frac{1.2012}{2013} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2.2012}{2013} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3.2012}{2013} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4.2012}{2013} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2012.2012}{2013} \right\rfloor = \cdots$

Jawab :

Perhatikan bahwa $\left\lfloor \frac{1.2012}{2013} \right\rfloor = 0$, $\left\lfloor \frac{2.2012}{2013} \right\rfloor = 1$, $\left\lfloor \frac{3.2012}{2013} \right\rfloor = 2$ dst sampai $\left\lfloor \frac{2012.2012}{2013} \right\rfloor = 2011$

Sehingga 1 + 2 + 3 + … + 2011 = $\frac{2011.2012}{2} = 2023066$

5)Tentukan semua solusi $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan $\left\lfloor \frac{5+6x}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}$

Jawab :

Karena $\left\lfloor \frac{5+6x}{8} \right\rfloor$ hasil berupa bilangan yang tidak pecahan, maka kita harus menyeting $15x - 7 = 5m$, dengan $m \in \mathbb{Z}$ karena $15x - 7$ dibagi 5.

Untuk $m = 0 \implies x = \frac{7}{15}$ dan untuk $m = 1 \implies x = \frac{12}{15}$, $m = 2 \implies x = \frac{17}{15}$, dst

Kita cek , untuk

$$m = 0 \implies \left\lfloor \frac{39}{40} \right\rfloor = \frac{15\left(\frac{7}{15}\right) - 7}{5} = 0\ (memenuhi)$$

$$m = 1 \implies \left\lfloor \frac{49}{40} \right\rfloor = \frac{15\left(\frac{12}{15}\right) - 7}{5} = 1\ (memnuhi)$$

$$m = 2 \implies \left\lfloor \frac{57}{40} \right\rfloor \neq \frac{15\left(\frac{17}{15}\right) - 7}{5}\ (tidak\ memenuhi)$$

Jadi jawab pada soal di atas adalah $\frac{7}{15}\ dan\ \frac{12}{15}$

6)(OSP 2010)Uuntuk $\lfloor x \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Tentukan bilangan asli n sehingga $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \frac{1}{x}\lfloor x \rfloor = \frac{n}{n+1}$ memiliki tepat 2010 penyelesaian untuk x real positif

Jawab :

Perhatikan bahwa untuk $n \in \mathbb{N}$, jika

- $x = 0 \implies$ tidak mungkin
- $x = 1 \implies 1\left\lfloor\frac{1}{1}\right\rfloor + \frac{1}{1}\lfloor 1\rfloor = \frac{n}{n+1} \implies 1 + 1 = \frac{n}{n+1}$ (n tidak memenuhi)
- $x = 2 \implies 2\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor + \frac{1}{2}\lfloor 2\rfloor = \frac{n}{n+1} \implies 0 + 1 = \frac{n}{n+1}$ (n tidak memenuhi)
- $x = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2}\lfloor 2\rfloor + 2\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor = \frac{n}{n+1} \implies 1 + 0 = \frac{n}{n+1}$ (n tidak memenuhi)
- $x = \frac{3}{2} \implies \frac{3}{2}\left\lfloor\frac{2}{3}\right\rfloor + \frac{2}{3}\left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor = \frac{n}{n+1} \implies 0 + \frac{2}{3}.1 = \frac{n}{n+1} \implies n = 2$ (n memenuhi)
- $x = \frac{2}{3} \implies \frac{2}{3}\left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor + \frac{3}{2}\left\lfloor\frac{2}{3}\right\rfloor = \frac{n}{n+1} \implies \frac{2}{3}.1 + 0 = \frac{n}{n+1} \implies n = 2$ (n memenuhi)
- $x = \frac{3}{5} \implies \frac{3}{5}\left\lfloor\frac{5}{3}\right\rfloor + \frac{5}{3}\left\lfloor\frac{3}{5}\right\rfloor = \frac{n}{n+1} \implies \frac{3}{5}.1 + 0 = \frac{n}{n+1}$ (n tidak memenuhi)
- $x = \frac{5}{3} \implies \frac{5}{3}\left\lfloor\frac{3}{5}\right\rfloor + \frac{3}{5}\left\lfloor\frac{5}{3}\right\rfloor = \frac{n}{n+1} \implies 0 + \frac{3}{5}.1 = \frac{n}{n+1}$ (n tidak memenuhi)

Selanjutnya dapat kita simpulkan bahwa untuk $n = \frac{a}{a+1}$ dengan $a > 1$ atau $n = \frac{a-1}{a}$ dengan $a > 2$, untuk $a \in \mathbb{N}$, maka

$\underbrace{\boxed{1} \qquad \boxed{2}}_{tidak\ ada}$, tapi $\underbrace{\boxed{2} \qquad \boxed{3}}_{ada\ 2\ yaitu\ \frac{2}{3} dan \frac{3}{2}}$ juga untuk $\underbrace{\boxed{3} \qquad \boxed{4}}_{ada\ 2\ juga\ yaitu\ \frac{3}{4}\ dan\ \frac{4}{3}}$

Misalkan pada 10 bilangan asli pertama ada 16 bilangan real x yang memenuhi.
Sehingga untuk tepat 2010 bilangan real x , maka bilangan asli n yang memenuhi
$2n - 4 = 2010 \implies 2n = 2014 \implies n = 1007$

Jadi nilai n yang memenuhi adalah 1007.

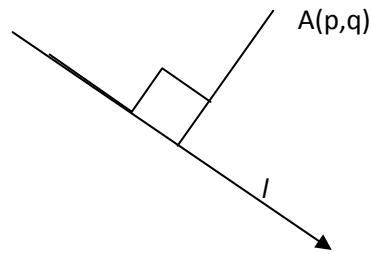
C.GEOMETRI DAN TRIGONOMETRI

1.Hubungan Antara Titik dan Garis

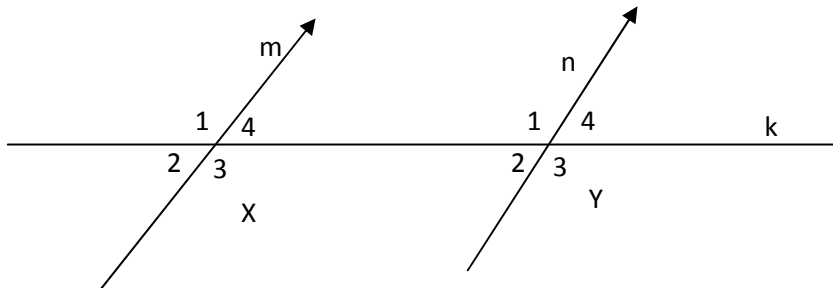
Titik tidak berdimensi, titik dapat terletak pada garis dan dapat juga terletak di luar garis

Jarak antara titik dan garis adalah panjang garis yang tegak lurus dari garis tersebut dengan garis itu

Misalkan ada titik A(p,q) dan Garis l adalah $l \equiv ax + by + c = 0$, maka jarak(d) titik A pada l adalah

$$d = \left|\frac{a.p + b.q + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

2.Hubungan Antara Garis dan Garis

Kemungkinan posisi 2 garis adalah 2 garis itu

- Saling berimpit
- Sejajar(gradiennya sama, $m_1 = m_2$)
  Dua garis sejajar dan berpotongan dengan sebuah garis, maka akan berakibat muncul beberapa pengertian

Lihat gambar di atas

a) Sudut Sehadap (ada 4)
   $\angle X_1\ dan\ \angle Y_1$ $\angle X_3\ dan\ \angle Y_3$
   $\angle X_2\ dan\ \angle Y_2$ $\angle X_4\ dan\ \angle Y_4$
   Catatan :
   $\angle X_1 = \angle Y_1$, dan seterusnya
b) Sudut Bertolak belakang
   $\angle X_1\ dan\ \angle X_3$ $\angle Y_1\ dan\ \angle Y_3$
   $\angle X_2\ dan\ \angle X_4$ $\angle Y_2\ dan\ \angle Y_4$
   Catatan :
   $\angle X_1 = \angle X_3$, dan seterusnya
c) Sudut dalam berseberangan (ada 2)
   $\angle X_3\ dan\ \angle Y_1$ (Besarnya sama)
   $\angle X_4\ dan\ \angle Y_2$ (Besarnya sama)
d) Sudut Luar Berseberangan
   $\angle X_1\ dan\ \angle Y_3$ (Besarnya sama)
   $\angle X_2\ dan\ \angle Y_4$ (Besarnya sama)
e) Sudut dalam sepihak
   $\angle X_4\ dan\ \angle Y_1$ (Dua sudut ini saling berpelurus)
   $\angle X_3\ dan\ \angle Y_2$

f) Sudut Luar sepihak
$\angle X_1 \ dan \ \angle Y_4$ (Dua sudut ini saling berpelurus)
$\angle X_2 \ dan \ \angle Y_3$

- Berpotongan tegak lurus (gradiennya $m_1 . m_2 = -1$)
- Berpotongan tidak tegak lurus
- Bersilangan

Contoh C.1

1)Tentukan nilai m jika ketiga garis, $l \equiv 2x - 3y = 4$, $k \equiv 3x + 4y = 6$ dan $g \equiv (m - 2013)x + y = -8$ melalui satu titik

Jawab :

Perhatikan bahwa, 3 garis, yaitu $l, k \ dan \ g$ melalui sebuah titik, maka kita harus menentukan titik pertemuan tersebut cukup dengan eliminasi garis $l \ dan \ k$ dan hasilnya disubstitusikan ke garis g

Sehingga untuk eliminasi garis $l \ dan \ k$,

$2x - 3y = 4$ (x3) $6x - 9y = 12$

$3x + 4y = 6$ (x2) $6x + 8y = 12$ $-$

$-17y = 0 \Rightarrow y = 0$

diperoleh $x = 2$ dan titik pertemuan ketiga titik itu adalah $(2,0)$

Selanjutnya titik $(2,0)$ disubstitusikan ke $(m - 2013)x + y = -8$, sehingga

$(m - 2013).2 + 0 = -8 \Rightarrow m - 2013 = -4 \Rightarrow m = 2009$

Jadi, nilai $m = 2009$

2)(Mat Das-UM UGM 2008) Persamaan garis yang melalui titik potong garis $6x - 10y - 7 = 0$ dan $3x + 4y - 8 = 0$ serta tegak lurus dengan garis ke-2 adalah ...

Jawab :

Kita tentukan dulu titik potong kdua garis yang diketahui tersebut, yaitu

$6x - 10y - 7 = 0$ (x1) $6x - 10y - 7 = 0$

$3x + 4y - 8 = 0$ (x2) $\quad 6x + 8y - 16 = 0 \quad -$

$$-18y + 9 = 0$$

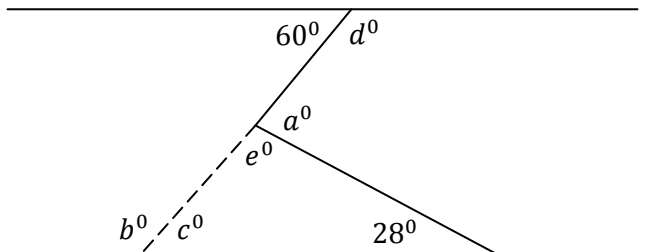
Diperoleh $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$

Sehingga titik potongnya yang dimaksudkan adalah $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, karena tegak lurus dengan garis ke-2 dan syarat 2 garis tegak lursu adalah $m_1.m_2 = -1$.

Perhatikan gradien(kemiringan) garis ke-2 adalah, $3x + 4y - 8 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 2$, diperoleh $m_1 = -\frac{3}{4}$ sehingga $m_2 = \frac{4}{3}$.

Selanjutnya dapat kita tentukan garis yang dimaksud, yaitu $y = m_2(x - a) + b$, sehingga persamaan garis tersebut adalah :

$$\boldsymbol{y = \frac{4}{3}(x - 2) + \frac{1}{2}}$$

3)Perhatikan gambar berikut!

Tentukan besar sudut

$a^0, b^0, c^0, d^0 \; dan \; e^0$

Jawab :

Perhatikan bahwa, sudut d^0 dapat kita tentukan dengan $60^0 + d^0 = 180^0$ (sudut lurus), sehingga didapatkan besar sudut $d^0 = 120^0$. Selanjutnya $b^0 = d^0 = 120^0$(dalam bersebrangan), termasuk $c^0 = 60^0$ (dalam bersebrangan).

Mencari sudut a^0 dapat ditentukan dengan $a^0 = 60^0 + 28^0 = 88^0$ (pada dasarnya besar sudutnya ditentukan dengan pertolongan garis lurus yang melalui perpotongan ketiga garis itu dan sejajar 2 garis yang telah ada)

Dan terakhir besar sudut $e^0 = 180^0 - a^0$, sehingga besar sudut $e^0 = 180^0 - 88^0 = 92^0$ (akibat sudut lurus)

Jadi, dengan memanfaatkan berbagai sifat dapat kita tentukan besar sudut yang diinginkan.

3.Sudut

3.1.Macam-macam sudut

- Derajat yaitu besar sudut satu putaran penuh dibagi 360 bagian yang sama atau 360^0
- Radian , satu putaran penuh = 2π radian
- Grade/gone yaitu besar sudut satu putaran penuh dibagi 400 bagian yang sama atau 400^g

3.2.Perbandingan antar satuan sudut

- Satu putaran penuh = 1 keliling lingkaran = $360^0 = 2\pi\, radian = 400^g$
- $\frac{1}{2}$ putaran penuh = $\frac{1}{2}$ keliling lingkaran = $180^0 = \pi\, radian = 200^g$
- $\frac{1}{4}$ putaran penuh = $\frac{1}{4}$ keliling lingkaran = $90^0 = \frac{1}{2}\pi\, radian = 100^g$

3.3.Sudut Penyiku dan Sudut Pelurus

- Sudut Penyiku(Komplemen)
- Sudut Pelurus(Suplemen)

3.4.Menghitung besar sudut berkaitan dengan posisi jarum jam panjang dan pendek

- $a^0 = \left|n_{jam}.(30^0) - m_{menit}.(5{,}5^0)\right|$, andaikata belum menunjukkan sudut terkecil, maka cukup kita hitungkan $360^0 - a^0$
- Kalau berimpit, maka pada pukul n lebinya dalam menit, dapat kita tentukan dengan $5n + \frac{5n}{11}$

Contoh C.2

1)Tentukan $120^0 = \cdots \pi\, rad = \ldots^g$

Jawab :

Perhatikan bahwa $360^0 = 2\pi\, rad = 400^g \Longrightarrow \frac{1}{3}.360^0 = \frac{1}{3}.2\pi\, rad = \frac{1}{3}.400^g \Longrightarrow 120^0 = \frac{2\pi}{3}\, rad = \left(\frac{400}{3}\right)^g$

2)Jika besar penyiku suatu sudut adalah $\frac{1}{3}$ pelurusnya. Tentukan besar sudut yang dimaksud

Jawab :

Misalkan besar sudut itu x^0, maka penyiku sudut itu adalah $(90^0 - x^0)$ dan pelurusnya adalah $(180^0 - x^0)$, sehingga

$(90^0 - x^0) = \frac{1}{3}(180^0 - x^0) \Longrightarrow 270^0 - 3x^0 = 180^0 - x^0 \Longrightarrow x^0 = 45^0$

3)(Himatika FPMIPA UNNES 2009)Antara pukul 09.30 WIB dan 10.00 WIB maka jarum panjang dan pendek akan berimpit pada pukul 09.00 WIB lebih…

Jawab :

Gunakan rumus $5n + \frac{5n}{11}$, yaitu diketahui $n = 9$, maka saat berimpiatnya adalah $5.9 + \frac{5.9}{11} = 45 + \frac{45}{11} = 49\frac{1}{11}$ menit

4)Sudut terkecil yang dibentuk oleh jarum panjang dan menit saat pukul 20.06

Jawab :

Alternatif 1:

Bilangan jam 20 dan bilangan menit 6, maka besar sudutnya adalah kita dapat menggunakan rumus $a^0 = \left|n_{jam}.(30^0) - m_{menit}.(5{,}5^0)\right| = |20.30^0 - 6.(5{,}5^0)| = |600^0 - 33^0| = |567^0| = 567^0$. Supaya sudutnya paling kecil maka $567^0 - 360^0 = 207^0$, masih kurang kecil lagi, sehingga $360^0 - 207^0 = 153^0$

Alternatif 2:

Pukul 20.06 adalah saat jam 8 lebih 6 menit malam hari, sehingga

$a^0 = \left|n_{jam}.(30^0) - m_{menit}.(5{,}5^0)\right| = |8.30^0 - 6.5{,}5^0| = |240^0 - 33^0| = |207^0| = 207^0$, masih kurang kecil lagi, sehingga $360^0 - 207^0 = 153^0$ adalah sudut yang diinginkan

Catatan :

Pandang saat pukul 06.00, dengan melihat jarum panjang dan pendek kita langsung dapat mengatakan sudut terkecil akan sama dengan sudut terbesar yaitu sudut setengah lingkaran atau 180^0. Pada saat 01.30 sudut yang kita dapatpun tidak kalah istimewa yaitu 135^0. Sehingga saat jam 06.00 kita melihat sudut pada jam yang sangat jelas yaitu $180^0 = 6.30^0$ dan saat melihat pukul 01.30 kita melihat besar sudutnya adalah $135^0 = 1.30^0 - 30.x^0 = 30.x^0 - 1.30^0$, selanjutnya dengan memandang $135^0 = 30.x^0 - 1.30^0 \Longrightarrow 30x^0 = 165^0 \Longrightarrow x^0 = 5{,}5^0$, dari sinilah pengerjaan **Contoh C.2 soal no.4** dimulai, yaitu $a^0 = \left|n_{jam}.(30^0) - m_{menit}.(5{,}5^0)\right|$

4.Bangun Datar (Dimensi Dua)

Ada 2 jenis bangun datar, yaitu

- Beraturan
- Tak beraturan

4.1.**Bangun Datar Beraturan**

a) Segitiga
   - Jika diketahui tinggi(baik siku-siku maupun tidak)
     Misalkan segitiga itu siku-siku gunakan *tripel phytagoras*
     Luas = $\frac{1}{2}.alas.tinggi$
     Keliling = Jumlah semua sisinya
   - Jika tidak diketahui tinggi
     Jika diketahui segitiga tersebut bersisi $a, b\ dan\ c$ serta $s = \frac{1}{2}keliling$
     Luas = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
     Keliling = Jumlah semua sisinya
   - Jika diketahui sudutnya
     Luas = $\frac{1}{2}.a.b.\sin < C = \frac{1}{2}.a.c.\sin < B = \frac{1}{2}.b.c.\sin < A$
     Keliling = Jumlah semua sisinya
   - Sama sisi
     Luas = $\frac{1}{4}$ x $(sisi^2)$ x $\sqrt{3}$
     Keliling = 3 x (sisi)
   - Jika diketahui koordinatnya
     Jika diketahui memiliki koordinat $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), dan\ C(x_3, y_3)$
     Luas = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1\ x_2\ x_3\ x_1 \\ y_1\ y_2\ y_3\ y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$
     Keliling = Jumlah semua sisinya, dimana jarak 2 titiknya adalag salah satu sisinya, misalkan $B(x_2, y_2), dan\ C(x_3, y_3)$
     Jarak titik B ke C adalah = $\overline{BC} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$
     Catatan : *untuk luas proses perkalian seperti determinan pada matrik*
   - Jika diketahui beberapa titik yang membentuk segi-n acak dan memiliki luas, dengan koordinat $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$.
     Luas bangun tersebut adalah = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1\ x_2\ x_3 \dots x_{n-1}\ x_n\ x_1 \\ y_1\ y_2\ y_3 \dots y_{n-1}\ y_n\ y_1 \end{vmatrix}$, atau
     Luas = $\frac{1}{2}|x_1.y_2 + x_2.y_3 + \cdots + x_n.y_1 - y_1.x_2 - y_2.x_3 - \cdots - y_n.x_1|$
     Keliling : Menyesuaikan,yaitu jumlah seluruh sisinya
     Catatan : *untuk luas proses perkalian seperti determinan pada matrik*

b) persegi
   Luas = (sisi) x (sisi) = $\frac{1}{2}.(diagonal)^2$
   Keliling = 4 x (sisi)

c) Persegi panjang

Luas = (panjang) x (lebar)
Keliling = 2 x (panjang + lebar)

d) Jajargenjang
Luas = $\frac{1}{2}.alas.tinggi$
Keliling = jumlah seluruh sisinya

e) Trapesium
Luas = $\frac{1}{2}$ x (jumlah 2 sisi yang sejajar) x tinggi
Keliling = Jumlah seluruh sisinya

f) Belah ketupat
Luas = $\frac{1}{2}$ x $(diagonal_1)$ x $(diagonal_2)$
Keliling = 4 x (sisi)

g) Layang-layang (konveks)
Luas = $\frac{1}{2}$ x $(diagonal_1)$ x $(diagonal_2)$
Keliling = Jumlah seluruh sisinya

h) Segi 6 beraturan (konveks)
Luas = $\frac{3}{2}$ x $(sisi^2)$ x $\sqrt{3}$
Keliling = 6 x (sisi)

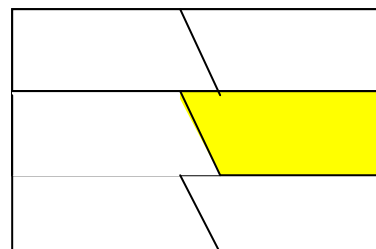
i) Segi-n beraturan
Luas = $\frac{(sisi)}{4}$ x n^2 x $cotan\left(\frac{180^0}{n}\right)$
Keliling = n x sisi

j) Ellips
Luas = $\pi.a.b$
Keliling = $\pi(a+b)$
dengan a adalah sumbu panjang(mayor), b adalah sumbu pendek(minor)

k) Lingkaran
Luas = $\pi.r^2 = \frac{1}{4}.\pi.d^2$
Keliling = $2.\pi.r = \pi.d$
dengan , $\pi \approx 3{,}14 \approx \frac{22}{7}$, r = jari-jari lingkaran, dan d = diameternya, dimana d = 2r

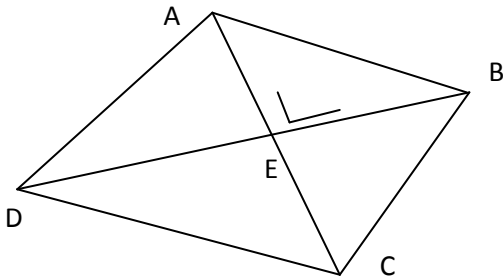
Contoh C.3

1)Tentukanlah luas daerah yang diarsir jika luas persegi panjang itu $36\ cm^2$

Catatan : masing-masing garis sejajar dengan pasangannya dan sama panjang

Jawab :

Luas yang diinginkan soal adalah $\frac{1}{6}.luas\ totalpersegi\ panjang$

Sehingga luas arsiran $= \frac{1}{6}.36 = 6\ cm^2$

2)Diagonal segi empat ABCD berpotongan di titik E. Luas segitiga ABE 6 satuan, luas segitiga CDE 24 satuan, dan luas segitiga DAE sama dengan luas segitiga BCE. Berapakah luas segitiga DEA?

Jawab : karena $[DEA] = [BEC]$

$[DEA].[BEC] = [DEA]^2 = [ABE].[CDE]$

$[DEA] = \sqrt{6.24} = \sqrt{144} = 12$

4.2.**Bangun Datar tak Beraturan(Materi Tambahan)**

Biasanya yang dihitung luasnya

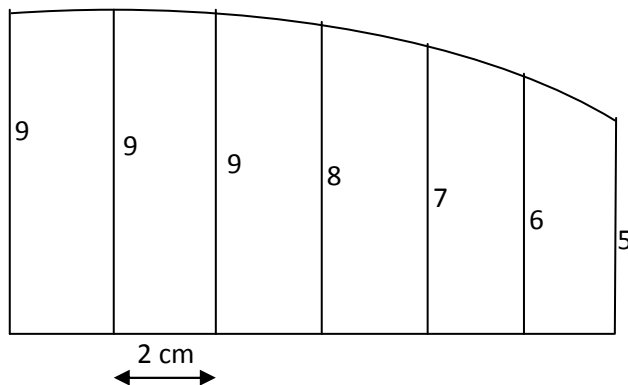
Penghitungan luasnya

- **Trapesioda(Prinsip trapesium)**
  Bangun daerah tak beraturan dibagi menjadi beberapa bagian yang sama.
  Ciri-ciri:
  a)Lebar tiap bagian sama
  b)Tiap bidang yang telah dipartisi disebut *pias*
  c)Tiap pias memiliki sepasang sisi yang sejajar misalkan $O_1, O_2, O_3, O_4\ dan\ seterusnya$ yang selanjutnya disebut panjang pias dengan lebar tiap pias dimisalkan *d* satuan panjang
  d)Luas tiap pias dihitung dengan konsep luas trapezium
  e)Luas total bidang sama dengan jumlah luas masing-masing pias.
  f)Luas Daerahnya = $d\left\{\left(\frac{O_1+O_n}{2}\right) + O_2 + O_3 + O_3 + \cdots + O_{n-2} + O_{n-1}\right\}$
- **Mid Ordinat(Prinsip trapesium)**
  Prinsipnya sama dengan menghitung luas dengan rumus traoesioda bedanya pad mid ordinat tiap pias dihitung dulu luasnya kemudian baru dijumlahkan semuanya
  Ciri-ciri:
  1)Jika Y_n menunjukan (mid ordinat=nilai tengah antara panjang sisi tiap pias), maka
  2)Luas total bidang = $d(jumlah\ total\ ordinat\ tengah)$
- **Aturan Simpson(aplikasi integral untuk menghitung luas)**

Jika kita ingin mencari daerah di bawah kurva $y = f(x)$ dengan sumbu$-x$ di interval $[a\,,b]$.
Aturan:
Bagilah derah yang terjadi menjadi n buah trapezium yang genap dengan lebar s dan tingginya $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ dari interval $[a\,,b]$ tersebut.
Luas = $\frac{s}{3}\{(F+L)+4E+2R\}$, dengan
F = ordinat pertama pada interval $[a\,,b]$
L = ordinat terakhir pada interval $[a\,,b]$
E = banyak ordinat nomor genap
R = banyak ordinat nomor ganjil

- Jika berupa bidang berpetak, maka petak yang *utuh* dihitung satu-satuan dan yang *tidak utuh* dihitung setengahnya saja kemudian dijumlahkan hasilnya atau Luas = $\left(total\ derah\ utuh + \frac{1}{2}(total\ daerah\ tidak\ utuh)\right)$

Contoh C.4

Tentukan luas daerah berikut dengan Trapesioda dan Aturan Simpson

NB : Setiap pias lebarnya sama

Jawab :

a) Jika dihitung luasnya dengan rumus Trapesioda, maka

Luas daerah = $d.\left\{\left(\frac{O_1+O_7}{2}\right)+O_2+O_3+\cdots+O_6\right\} = 2\left\{\left(\frac{9+5}{2}\right)+9+9+8+7+6\right\} = 92\ cm^2$

b)Luas dengan Aturan Simpson = $\frac{S}{3}\{(O_1+O_7)+4(O_2+O_4+O_6)+2(O_3+O_5)\}$

Sehingga Luas daerah = $\frac{2}{3}\{(9+5)+4(9+8+6)+2(9+7)\} = \frac{2}{3}\{14+92+32\} =$
$92\ cm^2$

Catatan : hasil yang diperoleh antara mid ordinat dan simpson kadang sama kadang berbeda dengan selisih tertentu, ini disebabkan karena keduanya memang pendekatan dalam mencari luas dari bidang tak beraturan.

5.Kesebangunan dan Kekongruenan

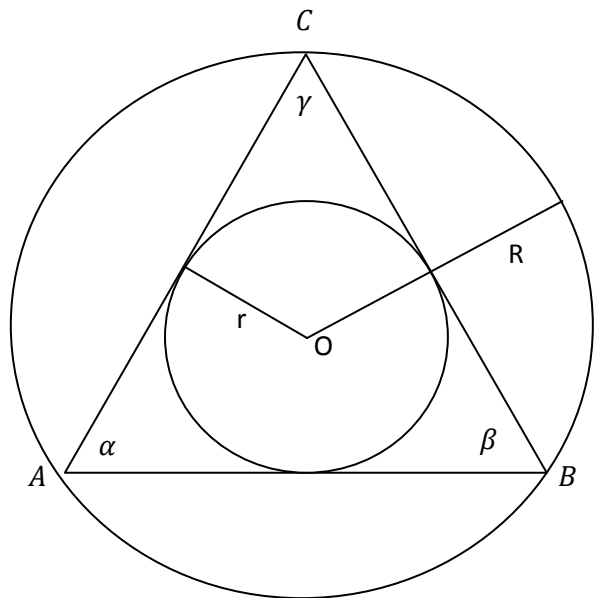
5.1.Bila 2 segitiga dikatakan sebangun :

- Jika ada kesesuaian antara titik-titik sudutnya
- Jika dua sudut dari segitiga yang pertama sama dengan dua sudut dari segitiga yang kedua
- Akibat : mempunyai sisi-sisi yang sebanding antara dua segitiga tersebut

5.2.Bila 2 segitiga dikatakan kongruen(*sama dan sebangun*) :

- Jika ada kesesuaian antara titik-titik sudutnya dari 2 segitiga tersebut
- Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar dan sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang
  Sehingga ada istilah :
  a) sisi-sisi-sisi (SSS)
  b) sisi-sudut-sisi (S-Sd-S)
  c) sudut-sisi-sudut (Sd-S-Sd)

6.Sifat-Sifat Segitiga

- Segitiga
  Sifat-sifat yang berlaku pada sebuah segitiga adalah
  1) $< A + < B + < C = 180^0$
  2) Jenis segitiga ada 3, yaitu: Tumpul, lancip dan siku-siku
  3) Identitas
     i. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$,demikian pula jika α diganti dengan β atau γ
     ii. $tan^2\alpha - sec^2\alpha = -1$
     iii. $cotan^2\alpha - cosec^2\alpha = -1$
     iv. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
     v. $Cotan\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
     vi. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
     vii. $cosec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$
  4) Aturan sinus
     $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
  5) Aturan cosinus
     i. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
     ii. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
     iii. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
  6) Keliling dan luas
     i. [ABC] = $\frac{1}{2}$. alas.tinggi

ii. [ABC] = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

iii. [ABC] = $\frac{1}{2}\ bc \sin\alpha$

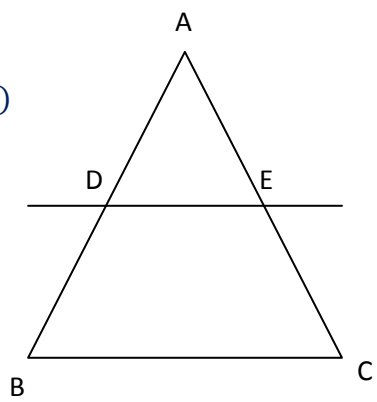
iv. [ABC] = $\frac{1}{2}\ ac \sin\beta$

v. [ABC] = $\frac{1}{2}\ ab \sin\gamma$

vi. [ABC] = $\frac{abc}{4R}$

vii. [ABC] = rs , dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

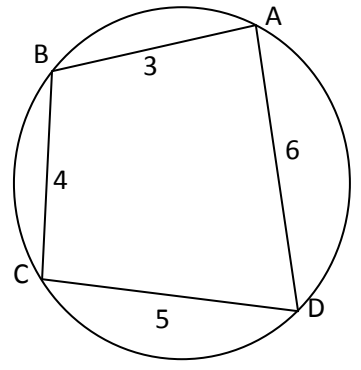
viii. [ABC] = $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{abcrs}{R}}$

ix. [ABC] = $\frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$

- Pertidaksamaan segitiga
  Yaitu :
  $a + b > c$
  $a + c > b$
  $b + c > a$
- Segitiga dengan sebuah/beberapa garis yang memotonganya
  a)Jika garis yang memotong sejajar dengan salah satu sisi maka akan berlaku
  $$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$
  b)Bila garis yang memotong tidak sejajar dengan sisi manapun maka akan berlaku beberapa ketentuan, misalkan **Teorema Menelous**, **Teorema Ceva**, **Teorema Stewart** dan lain-lain

Contoh C.5

1)Perhatikan gambar berikut, tentukan

Besar nilai $\cos\angle C$

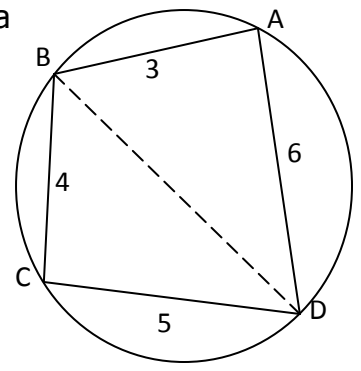
Jawab :

Perhatikan bahwa langkah yang mungkin dapat

kita tempuh untuk mempermudah pencarian kita

dalam mencari nilai $\cos\angle C$ adalah

kita buat garis bantu yang melalui

titik B dan D seperti pada gambar berikut

Sehingga seolah-olah ada 2 segi tiga dalam

lingkaran tersebut

Dengan aturan cosinus, kita mendapatkan

$$Cos\ \angle C = \frac{CB^2 + CD^2 - BD^2}{2.CB.CD} = \frac{4^2 + 5^2 - BD^2}{2.4.5} = \frac{41 - BD^2}{40} \dots\dots\dots\dots 1)$$

$$Cos\ \angle A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2.AB.CD} = \frac{3^2 + 6^2 - BD^2}{2.3.6} = \frac{45 - BD^2}{36} \dots\dots\dots\dots 2)$$

Perhatikan pula, bahwa $\angle A + \angle C = 180^0$ karena akibat segiempat tali busur, sehingga $\angle A = 180^0 - \angle C \Rightarrow \cos\angle A = -cos(180^0 - \angle C) = -\cos\angle C$ kemudian

$$-Cos\ \angle C = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2.AB.CD} = \frac{3^2 + 6^2 - BD^2}{2.3.6} = \frac{45 - BD^2}{36} \dots\dots\dots 3)$$

Dari eliminasi persamaan 1) oleh 3) diperoleh

$$76\cos\angle C = -4 \Leftrightarrow \cos\angle C = -\frac{1}{19}$$

Jadi, nilai dari $\cos\angle C = -\frac{1}{19}$

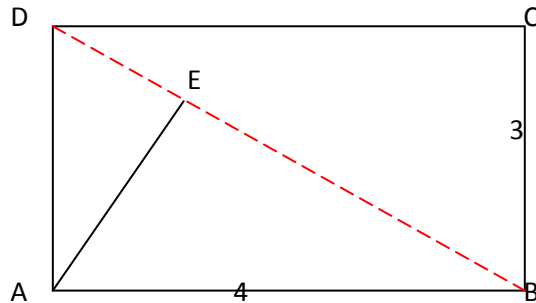
2)Diketahui ABCD persegi panjang dengan AB = 4 dan BC = 3, maka jarak A ke BD adalah…

Jawab :

Perhatikan ilustrasi gambar berikut

Misalkan jarak titik A terhadap garis BD

diwakili oleh garis AE, dimana AE ⊥ BD

Sehinga panjang AD dapat ditentukan dengan

Luas ΔABD = Luas $\Delta ABD \Rightarrow \frac{1}{2}.AD.AB = \frac{1}{2}.BD.AE$, dengan AE = t sebagai tinggi, dan panjang BD dapat kita cari dengan rumus phytagoras, yaitu

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

sehingga $AE = \frac{AD.AB}{BD} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5}$ satuan panjang

3)Pada setengah lingkatan di dalamnya ada segitiga siku-siku. Jika sudut siku-siku pada keliling lingkaran dan sisi miring segitiga berimpit dengan diameter serta sisi pengapit siku-sikunya adalah 4 dan 6 dalam cm, tentukan jari-jari lingkaran yang dimaksud

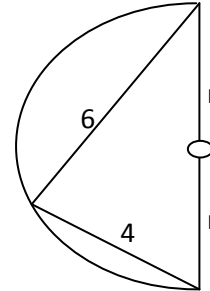
Jawab :

Perhatikan gambar berikut :

Untuk mencari panjang jari-jari dengan mudah kita dapat menentukannya dengan rumus phytagoras, yaitu

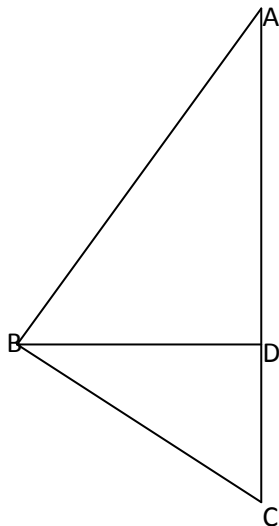
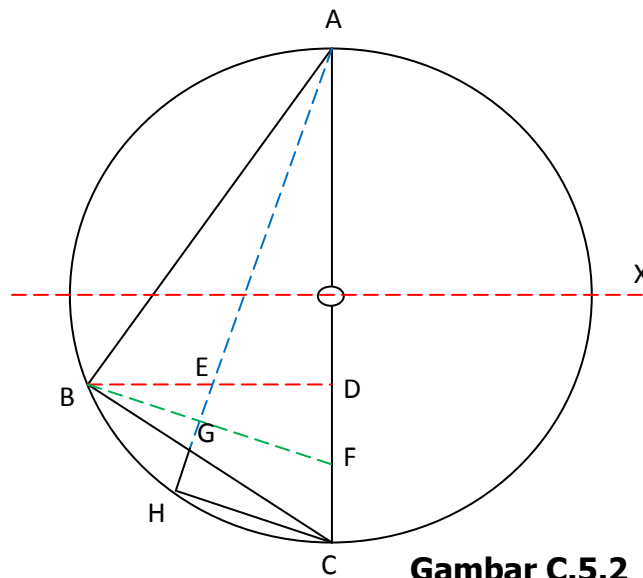
$(2r)^2 = 6^2 + 4^2 \Longrightarrow 4r^2 = 36 + 16 = 52$

Sehingga $r^2 = 13 \Longrightarrow r = \sqrt{13}$

Jadi, jari—jari(r) lingkaran tersebut adalah $\sqrt{13}$

4)(OSP 2006)Diberikan segitiga ABC siku-siku di B dan garis tinggi dari B memotong sisi AC di D. Bila titik E dan F berturut-turut adalah titik tengah BD dan CD, maka buktikan bahwa AE ⊥ BF

Jawab :

Perhatikan ilustrasi dari gambar berikut

Langkah pertama kita pecak menjadi 2 ilustrasi gambar, yaitu

Gamabar C.5.1 **Gambar C.5.2**

Langkah selanjutnya adalah kita buat beberapa gambar, garis dan titik bantu yang lain. Andaikan ΔABC kita buatkan sendiri sisinya, misalnya AB = 8, BC = 6 dan AC = 10 =

diameter(ingat sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran besarnya $= 90^0$). Dari sini jelas OA = r = 5 dan diperoleh titik A(0,5) serta panjang BD dapat itentukan dengan $BD = \frac{AB.BC}{AC} = \frac{8.6}{10} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$, jelas juga bahwa BD // Sumbu-X dan panjang AD = $\frac{32}{5}$(denga rumus phytagoras). Sehingga koordinat titik D, B dan E juga yang lain dapat ditentukan yaitu D($0,-\frac{7}{5}$), B($-\frac{24}{5},-\frac{7}{5}$) ,E$\left(-\frac{12}{5},-\frac{7}{5}\right)$, dan F$\left(0,-\frac{16}{5}\right)$, karena titik F adalah tengah-tengah CD.

Langkah berikutnya adalah

Untuk membuktikan G adalah siku-siku adalah dengan mengecek gradien garis yang melalui titik G, yaitu garis AE(dimana gradiennya adalah $m_{AE} = \frac{32}{12}$) dan garis BF(dengan gradient $m_{BF} = -\frac{9}{24}$), ingat pelajaran di SMP/MTs tentang cara menentukan gradien pada kertas berpetak dimana gradient dari suatu garis adalah $m = \frac{unsur\ panjang\ y}{unsur\ panjang\ x}$, positif jika ke kanan atau ke atas, negatif jika ke kiri atau ke bawah.

Sehingga kalau dua graien itu kita kalikan dan menghasikan -1, maka dapat dipastikan titik G siku-siku. Dari hasil penentuan gradient maka $m_{AE}.m_{BF} = \left(\frac{32}{12}\right).\left(-\frac{9}{24}\right) = -\frac{288}{288} = -1$

Jadi terbukti bahwa, titik G siku-siku

7.Dalil(Teorema) Menelaus

Perhatikan gambar segitiga di samping

Pada ΔABC , terdapat titik D pada sisi AC, E pada sisi BC, dan F pada sisi AB.

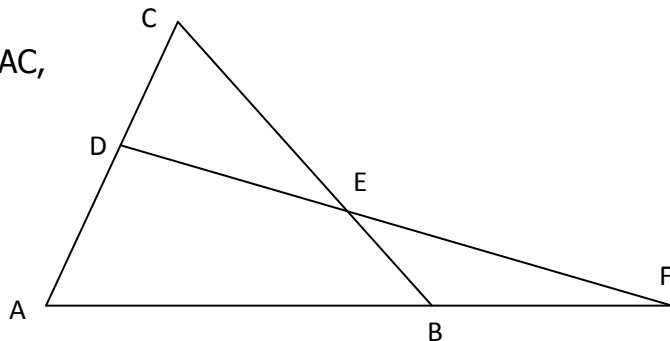
Maka

AF. BE . CD = AD . BF . CE

atau

$$\mathbf{\frac{AF}{BF}.\frac{BE}{CE}.\frac{CD}{AD} = 1}$$

Jika dan hanya jika Titik-titik D, E, dan F segaris

8.Dalil(Teorema) Ceva

Perhatikan gambar segitiga di samping

Pada ΔABC , terdapat titik D pada sisi BC,

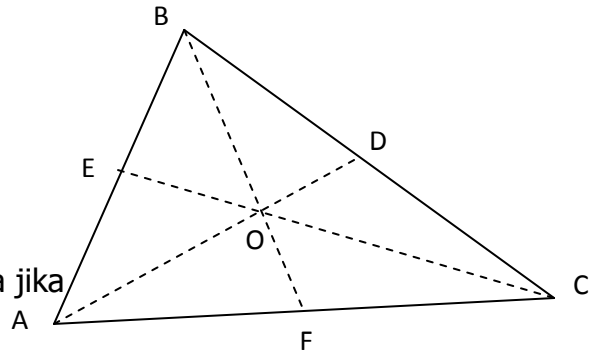
E pada sisi AB, dan F pada sisi AC.

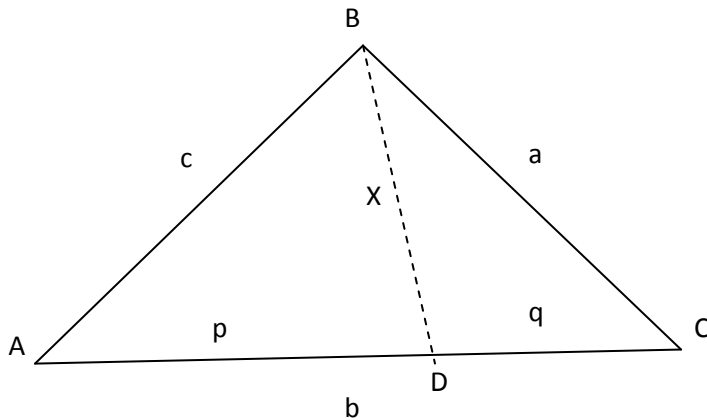
Garis AD, BF, dan CE berpotongan di satu

titik persekutuan(yaitu titik O) jika dan hanya jika

AF . CD . BE = FC . DB . EA

atau

$$\frac{\mathbf{AF}}{\mathbf{FC}} \cdot \frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{DB}} \cdot \frac{\mathbf{BE}}{\mathbf{EA}} = \mathbf{1}$$

9.Dalil(Teorema) Stewart

Dalil Stewart mengatakan bahwa

$$\boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{a^2 p + c^2 q - pqb}}{\boldsymbol{b}}}$$

Contoh C.6

1)Pada **Contoh C.5 soal no 4)**, tentukan panjang AE jika panjang sisi yang lain seperti dalam pembahasannya

Jawab :

Gunakan **Teorema Stewart** yaitu $AE = \sqrt{\frac{AB^2.DE+AD^2.BE-BE.DE,BD}{BD}}$, maka

$$AE = \sqrt{\frac{8^2.\left(\frac{12}{5}\right)+5^2.\left(\frac{12}{5}\right)-\left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{24}{5}\right)}{\frac{24}{5}}} = \sqrt{\frac{3874}{100}} = \sqrt{38{,}74} \text{ satuan panjang}$$

2)Tunjukkan kebenaran **Teorema Menelous** pada no 7) di atas

Jawab :

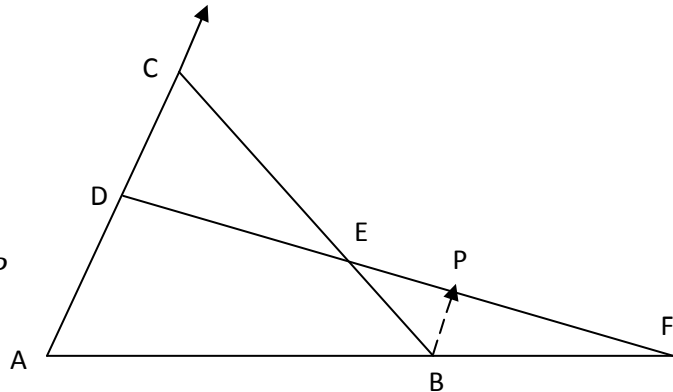
Perhatikan bahwa $\Delta BEP \sim \Delta CDE$

$\frac{BE}{CE} = \frac{BP}{CD}$

$\frac{BE}{CE}.\frac{CD}{BP} = 1$ ....1)

Perhatikan pula bahwa $\Delta AFD \sim \Delta BFP$

$\frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BP}$

$\frac{AF}{BF}.\frac{BP}{AD} = 1$ ....2)

Dari 1) dan 2) diperoleh $\frac{BE}{CE}.\frac{CD}{BP}.\frac{AF}{BF}.\frac{BP}{AD} = 1$ atau $\frac{AF}{BF}.\frac{BE}{CE}.\frac{CD}{AD} = 1$

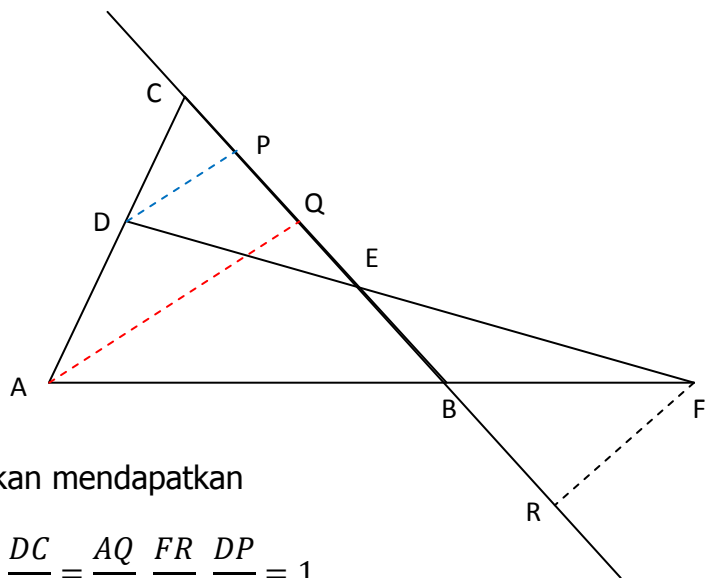
3)Perhatikan gambar berikut, tunjukkan bahwa $\frac{AB}{BF}.\frac{FE}{ED}.\frac{DC}{CA} = 1$

Jawab :

Perhatikan bahwa

$\Delta AQB \sim \Delta FRB$, sehingga $\frac{AB}{BF} = \frac{AQ}{RF}$

$\Delta RFE \sim \Delta PDE$, sehingga $\frac{FE}{ED} = \frac{FR}{DP}$

$\Delta PDC \sim \Delta QCA$, sehingga $\frac{DC}{CA} = \frac{DP}{AQ}$

Jika semuanya dikalikan maka kita akan mendapatkan

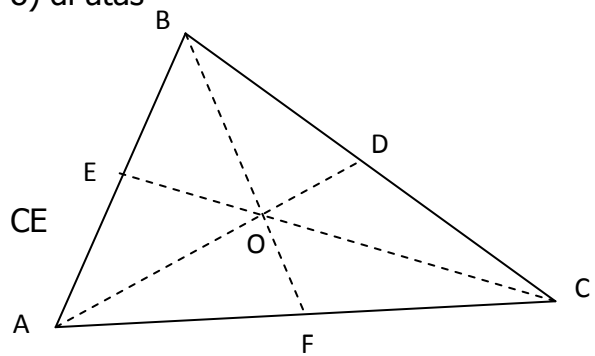
$$\frac{AB}{BF}.\frac{FE}{ED}.\frac{DC}{CA} = \frac{AQ}{RF}.\frac{FR}{DP}.\frac{DP}{AQ} = 1$$

4)Buktikan kebenaran **Teorema Ceva** untuk no 8) di atas

Jawab :

Perhatikan ilustrasi gambar berikut

Ada 3 garis(transversal sudut), yaitu AD, BF dan CE

Akan kita buktikan $\mathbf{\frac{AF}{FC}.\frac{CD}{DB}.\frac{BE}{EA}=1}$

Perhatikan Teorema Menelous pada(lihat **Contoh C.6 no.3**)

$\frac{AF}{FC}.\frac{CO}{OE}.\frac{EB}{BA}=1$ ....1)

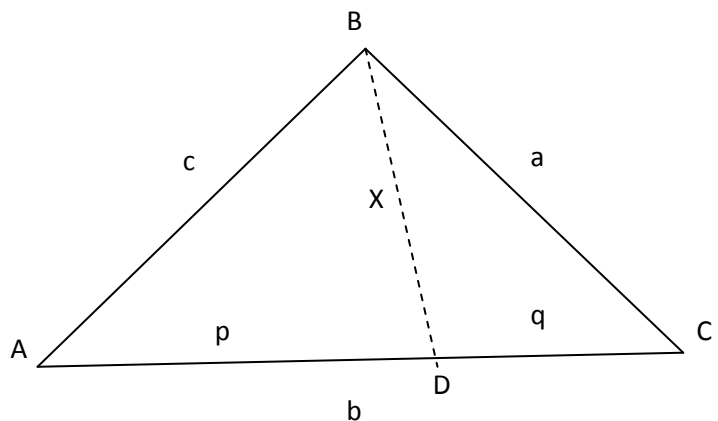
Dan Teorema Menelous pada

$\frac{BD}{DC}.\frac{CO}{OE}.\frac{EA}{AB}=1$ ....2)

Sehingga $\frac{AF}{FC}.\frac{CO}{OB}.\frac{EB}{BA}=\frac{BD}{DC}.\frac{CO}{OE}.\frac{EA}{AB}$, dengan kanselasi CO, OE dan BA, maka kita akan mendapatkan

$\frac{AF}{FC}.EB=\frac{BD}{DC}.EA \Leftrightarrow \frac{AF}{FC}.\frac{CD}{DB}.\frac{BE}{EA}=1$ terbukti

5)Tunjukkan kebenaran teorema stewart berikut

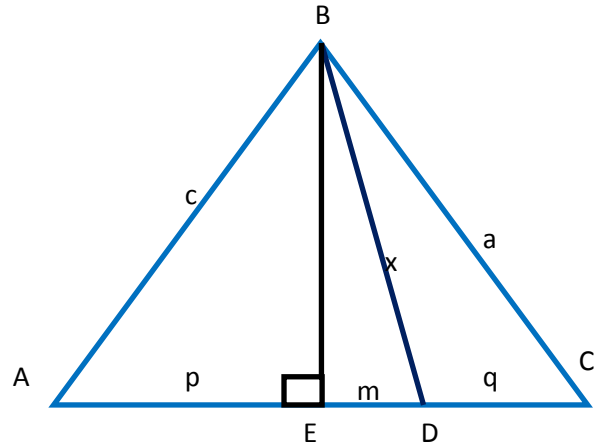
$$\boldsymbol{x=\sqrt{\frac{a^2p+c^2q-pqb}{b}}}$$

Bukti :

Perhatikan ilustrasi gambar berikut

Tarik garis BE ⊥ AC, misalkan DE = m, AD = p dan CD = q, maka

a)Untuk ΔADB, kita mendapatkan $BE^2 = c^2 - AE^2 = x^2 - m^2$

$c^2 = x^2 + AE^2 - m^2 \Longrightarrow c^2 = x^2 + (p-m)^2 - m^2 \Longrightarrow c^2 = x^2 + p^2 - 2pm + m^2 - m^2$

$\Longrightarrow c^2 = x^2 + p^2 - 2pm \Longrightarrow m = \frac{x^2+p^2-c^2}{2p}$

b)Untuk ΔCBD, dengan cara yang kurang lebih sama kita mendapatkan

$BE^2 = a^2 - CE^2 = x^2 - m^2 \Longrightarrow a^2 - (q+m)^2 = x^2 - m^2 \Longrightarrow a^2 - q^2 - 2mq - m^2 = x^2 - m^2 \;\; \Longrightarrow a^2 = x^2 + q^2 + 2mq \Longrightarrow m = \frac{-x^2-q^2+a^2}{2q}$

Dari a) dan b) didapat

$\frac{x^2+p^2-c^2}{2p} = \frac{-x^2-q^2+a^2}{2q} \Longrightarrow x^2q + p^2q - c^2q = -x^2p - q^2p + a^2p \Longrightarrow x^2(p+q) = a^2p + c^2q - p^2q - q^2p \Longrightarrow x^2b = a^2p + c^2q - pq(p+q) \Longrightarrow \; x^2b = a^2p + c^2q - pqb$

Jadi $x = \sqrt{\frac{a^2p+c^2q-pqb}{b}}$ terbukti

10.Hubungan Lingkaran dengan Titik

Ada 3 posisi suatu titik terhadap lingkaran

- Titik di dalam lingkaran
- Titik pada (keliling) lingkaran
- Titik di luar lingkaran

11.Hubungan Lingkaran dengan Garis

11.1.Ada beberapa posisi antara garis dengan lingkaran

- Jika suatu garis memiliki satu titik persekutuan dengan sebuah lingkaran maka garis itu disebut sebagai *garis singgung lingkaran*
- Sebuah garis yang memotong lingkaran di 2 titik disebut sebagai *garis potong* lingkaran, sehingga :
  1) Ruas garis yang dari garis potong yang menghubungkan 2 titik tersebut disebut sebagai *tali bususr*

2) Ruas garis yang menghubungkan 2 titik tersebut apa bila melalui titik pusat lingkaran maka garis itu disebut sebagai *diameter*

- Jika garis itu tidak menyinggung dan tidak memotong lingkaran maka garis itu di luar lingkaran

11.2.Beberapa hal lain hubungan lingkaran dengan garis

- Sudut Pusat
- Sudut Keliling

Contoh C.7

1)Perhatikan ilustrasi pada **Contoh C.5 soal no 4)**

2)Jika persamaan diberikan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, maka kedudukan titik-titik $A(1,4), B(5,0) dan\ C(5,1)$ adalah...

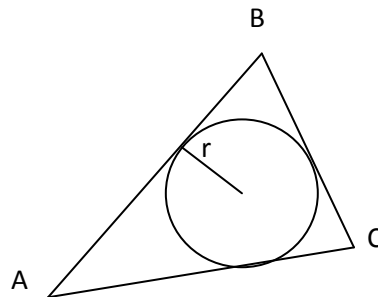
Jawab :

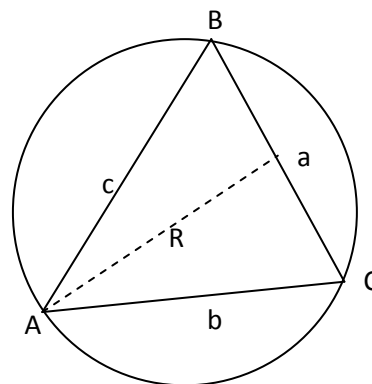
- Untuk titik $A(1,4) \Longrightarrow 1^2 + 4^2 = 17 < 25$ sehingga titik A di dalam lingkaran
- Untuk titik $B(5,0) \Longrightarrow 5^2 + 0^2 = 25 + 0 = 25 = 25$ sehingga titik B pada keliling lingkaran
- Untuk titik $C(5,1) \Longrightarrow 5^2 + 1^2 = 26 > 25$ sehingga titik C di luar lingkaran

12.Hubungan Lingkaran dengan Segitiga

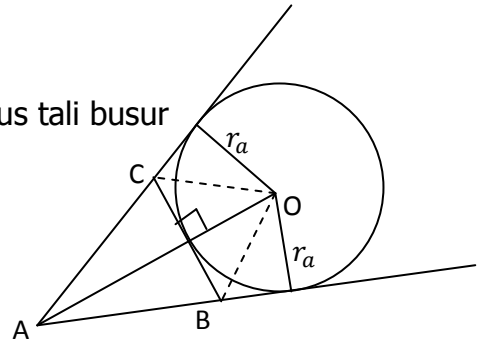
Pembahasan ini hanya di batasi untuk

12.1.Lingkaran dalam segitiga

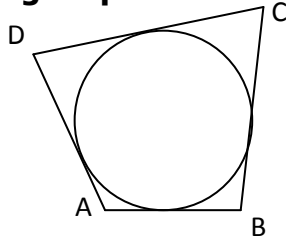
- r = $\frac{L\Delta}{s}$
- $L\Delta ABC = rs$
- L$\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (**Formula Heron**)

12.2.Lingkaran luar segitiga

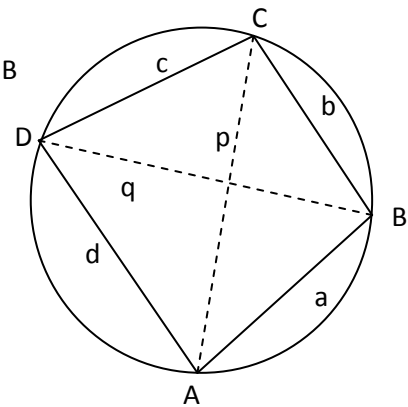
- R = $\frac{abc}{4.L\Delta}$
- $L\Delta ABC = \frac{abc}{4R}$
- $\frac{1}{2}a = R.sin\ A \Longrightarrow\ 2R = \frac{a}{\sin A}$
- $\frac{1}{2}b = R.\sin B \Longrightarrow\ 2R = \frac{b}{\sin B}$
- $\frac{1}{2}c = R.\sin C \Longrightarrow\ 2R = \frac{c}{\sin C}$

- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$
- AB, AC, dan BC adalah sisi segitiga ABC sekaligus tali busur

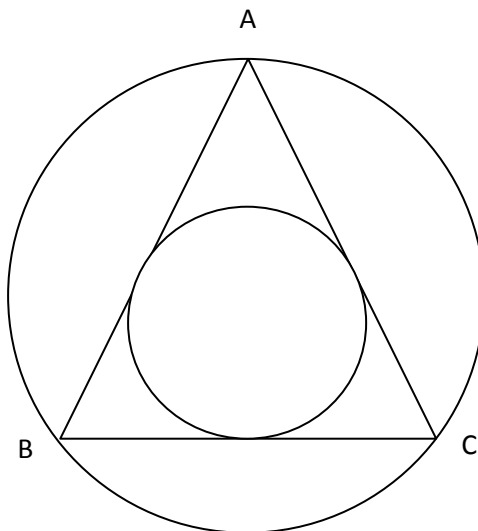
12.3.Lingkaran singgung segitiga

- $r_a = \frac{L\Delta ABC}{(s-a)}$ dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

13.Hubungan Lingkaran dengan Segiempat

13.1.Lingkaran dalam segi empat

- AD + BC = AB + CD

13.2.Lingkaran luar segi empat

- <A + <C = 180^0
- <B + <D = 180^0
- $pq = AD.BC + AB.CD$
- Luas ABCD = $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$
  dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$
  (**Formula Brahmagupta**)

Contoh C.8

1)Perhatikan gambar berikut, jika ada lingkaran dalam segitiga dan lingkaran luar segi tiga serta segitiganya adalah segitiga sama sisi, maka tentukan

a)Perbandingan ketiga luas bangun di atas

b)Perbandingan luas lingkaran dalam dan luar segitiga tersebut.

Jawab :

a)Untuk luas lingkaran dalam segitiga $L_o = \pi r^2$, luas segitiga sama sisinya adalah $L_\Delta = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}b^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}c^2\sqrt{3}$ dan luas lingkaran luar segitiga adalah $L_O = \pi R^2$

b)Perhatikan bahwa luas lingkaran dalam segitiga $L_o = \pi r^2 = \pi\left(\frac{L_\Delta}{s}\right)^2 = \pi\left(\frac{\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}}{\frac{3}{2}a}\right)^2 =$ $\pi\left(\frac{1}{6}a\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{12}a^2\pi$ dan luas lingkaran luar segitiga adalah $L_O = \pi R^2 = \pi\left(\frac{a^3}{4.\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}}\right)^2 =$ $\pi\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}a^2\pi$, sehingga

perbandingan luasnya adalalah $\frac{L_o}{L_O} = \frac{\frac{1}{12}a^2\pi}{\frac{1}{3}a^2\pi} = \frac{1}{4}$

2)Tunjukkan bahwa luas segi empat talibusur ABCD pada suatu lingkaran adalah

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$

Jawab :

Perhatikan ilustrasi berikut disamping

Luas ABCD = luas ΔABC + luas ΔDAC

Luas ABCD = $\frac{1}{2}ab\sin\angle B + \frac{1}{2}cd\sin\angle D$

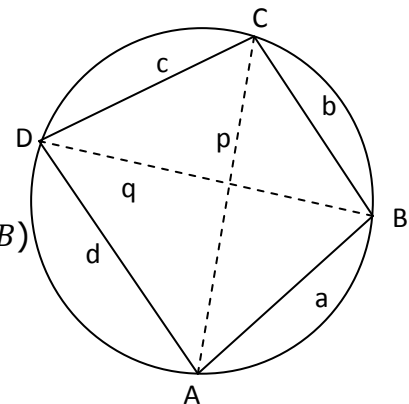
Luas ABCD = $\frac{1}{2}ab\sin\angle B + \frac{1}{2}cd\sin\angle B$ (karena $\sin\angle D = \sin\angle B$)

Luas ABCD = $\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\angle B$, sehingga

2.Luas ABCD = $(ab+cd)\sin\angle B$

Jika ruas kiri dan kanan dikuadratkan dan Luas ABCD = L, maka

$\Leftrightarrow 4L^2 = (ab+cd)^2\, sin^2\angle B$

$\Leftrightarrow 4L^2 = (ab+cd)^2(1 - cos^2\angle B)$

$\Leftrightarrow 4L^2 = (ab+cd)^2 - ((ab+cd)^2 cos^2\angle B)$ (dan jika masing-masing ruas dikalikan 4)

$\Leftrightarrow 16L^2 = 4(ab+cd)^2 - 4((ab+cd)^2 cos^2\angle B)$ ....1)

Perhatikan bahwa untuk nilai AC^2 adalah

$\Leftrightarrow AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \angle B = c^2 + d^2 - 2cd \cos\angle D$ (ingat $\cos\angle D = -\cos\angle B$)

Sehingga $a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \angle B = c^2 + d^2 + 2cd\cos\angle B$

$\Leftrightarrow 2(ab+cd)\cos\angle B = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$

$\Leftrightarrow 4(ab+cd)^2\ cos^2\ \angle B = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$.............................2)

Langkah selanjutnya substitusikan 2) ke 1) sehingga diperoleh

$\Leftrightarrow 16L^2 = 4(ab+cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$

$\Leftrightarrow 16L^2 = (2ab+2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$

$\Leftrightarrow 16L^2 = (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)$

$\Leftrightarrow 16L^2 = (a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2)(-a^2 + 2ab - b^2 + c^2 + 2cd + d^2)$

$\Leftrightarrow 16L^2 = ((a+b)^2 - (c-d)^2)(-(a-b)^2 + (c+d)^2)$

$\Leftrightarrow 16L^2 = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$

$\Leftrightarrow 16L^2 = (2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(-2a+2s)$

$\Leftrightarrow 16L^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$

$\Leftrightarrow L^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$

$\Leftrightarrow L = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

3)Pada **Contoh C.5 soal no 1)** tentukanlah luas ABCD

Jawab :

Luas ABCD = $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ dengan, a = 3, b = 4, c = 5, d = 6 dan $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d) = \frac{1}{2}(3+4+5+6) = 9$.

Sehingga luas ABCD = $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sqrt{(9-3)(9-4)(9-5)(9-6)} = \sqrt{6.5.4.3} = 6\sqrt{10}$ satuan luas.

14.Hubungan Lingkaran dengan Lingkaran

14.1.Dua lingkaran itu terpisah/tidak bersinggungan dan atau tidak berpotongan

Biasanya akan muncul 2 istilah di sini, yaitu

- Garis singgung persekutuan luar
- Garis singgung persekutuan dalam

14.2.Dua lingkaran itu bersinggungan

- Garis singgung persekutuan luar saja(jika lingkaran yang pertama tidak di dalam lingkaran yang kedua dengan satu titik singgung atau sebaliknya)

14.3.Dua lingkaran itu berpotongan

- Garis singgung persekutuan luar saja

14.4.Lingkaran yang pertama berada di dalam lingkaran yang kedua atau sebaliknya

- Tanpa garis singgung

14.5.Dua lingkaran itu berimpit(ukurannya sama)

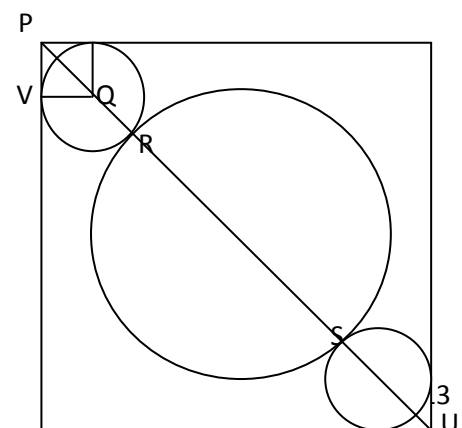
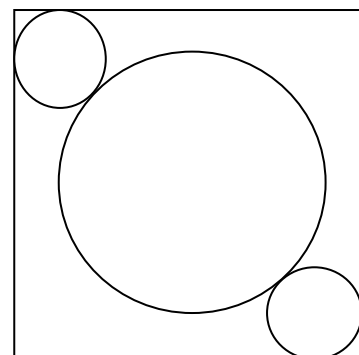
- Tanpa garis singgung

Contoh C.9

1)Perhatikanlah **Contoh A.12 soal no 5), 6), 7), 8) dan 9)**

2)Jika keliling persegi di samping adalah adalah 24 cm dan jari-jari 2 lingkaran kecil adalah masing-masing 1 cm, maka tentukan keliling lingkaran besar

Jawab :

Perhatikan bahwa Jika kita tarik garis diagonal persegi kita akan mendapatkan bahwa

Jarak $PQ = \sqrt{PV^2 + VQ^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (ingat jari-jari lingkaran kecil = $PV = 1\ cm$)

Dan jarak QR = 1 cm, sehingga jarak $PR = SU = 1 + \sqrt{2}\ cm$. Karena keliling persegi sama dengan 24 cm, maka panjang sisinya adalah 6 cm dan panjang diagonal persegi sama dengan $PU = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\ cm$.

Selanjutnya pajang RS dapat kita tentukan dengan $RS = PU - PR - SU = PU - 2PR$.

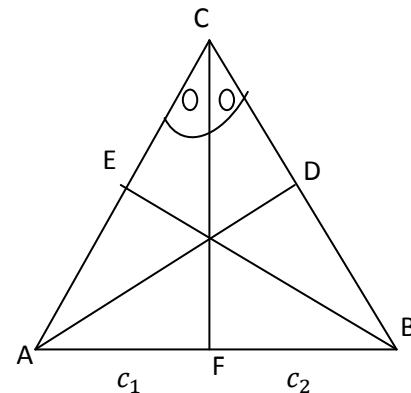
Sehingga $RS = 6\sqrt{2} - 2(1 + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2 = 4\sqrt{2} - 2 = 2(2\sqrt{2} - 1)\ cm$.

Selanjutnya keliling lingkaran besar adalah $\pi d = \pi(2r) = \pi(2RS) = 4\left((2\sqrt{2} - 1)\right)\pi\ cm$.

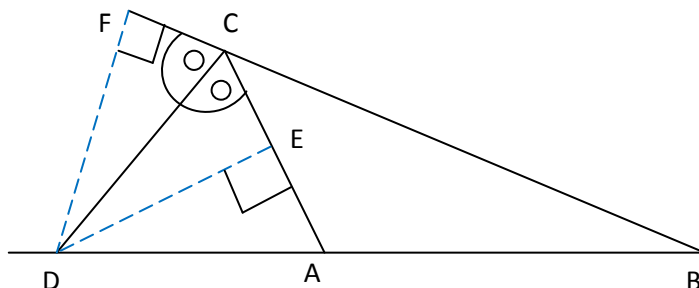
Jadi keliling lingkaran besar adalah sebesar $4\left((2\sqrt{2} - 1)\right)\pi\ cm$

15.Garis-Garis yang Melalui satu titik,Titik-titik Segaris

15.1.Garis-garis yang melalui satu titik pada sebuah segitiga sebarang

- **Garis Bagi(Pembagian sudut)**
  Adalah garis yang ditarik dari salah satu titik sudut dan membagi sudut itu menjadi 2 sama besar
  Ada 2 jenis, yaitu : garis bagi dalam dan garis bagi luar
  a) **Garis bagi dalam**
  1) Ketiga garis bagi akan bertemu di *satu titik* dan titik itu dinamakan *titik bagi*
  2) Titik-titik pada garis bagi akan berjarak sama ke kaki-kaki sudut
  3) *Titik bagi* merupakan *pusat lingkaran dalam*
  4) Garis bagi dalam dan garis bagi luar dari sudut yang sama akan tegak lurus sesamanya
  5) l_c adalah garis bagi dalam yang ditarik dari titik sudut C

Formula penting
1) $b : a = c_1 : c_2$ atau $ac_1 = bc_2$
2) $c_1 = \frac{bc}{a+b}$ dan $c_2 = \frac{ac}{a+b}$
3) $l_c^2 = ab - c_1.c_2$

b) **Garis bagi luar**
CD merupakan garis bagi luar segitiga ABC

Formula penting
1) DA : DB = $b : a$
2) $CD^2 = DA.DB - ab$

Contoh C.10.1

1) jika diketahui suatu ΔABC dengan BD garis bagi dalam dan BE garis bagi luar, maka buktikan bahwa BD $\perp$ BE

Jawab :

Perhatikan ilustrasi gambar berikut ini

$\angle B_1 + \angle B_2 + \angle B_3 + \angle B_4 = 180^0$

Karena $\angle B_1 = \angle B_2 \; dan \; \angle B_3 = \angle B_4$, maka

$2\angle B_2 + 2\angle B_3 = 180^0$

$\angle B_2 + \angle B_3 = 90^0$

Jadi terbukti bahwa BD $\perp$ BE

2) Pada ΔABC, ada *teorema* tentang garis bagi yang mengatakan: "kuadrat garis bagi dalam sama dengan hasil kali sisi sebelah dikurangi hasil kali sisi di hadapannya

Jawab :

Gunakan formula pada teorema Stewart, yaitu

$CF^2.c = a^2c_1 + b^2c_2 - c_1c_2c$

$CF^2.c = aac_1 + bbc_2 - c_1c_2c$

$CF^2.c = a(ac_1) + b(bc_2) - c_1c_2c$ karena $ac_1 = bc_2$

$CF^2.c = a(bc_2) + b(ac_1) - c_1c_2c$

$CF^2.c = ab(c_1 + c_2) - c_1c_2c$

$CF^2.c = ab(c) - c_1c_2c$

$CF^2 = ab - c_1c_2$

Jadi, terbukti

- **Garis Tinggi**

Adalah garis yang ditarik dari salah satu titik sudut dan memotong sisi di depannya(garis) dengan tegak lurus
Pada suatu segitiga terdapat 3 garis tinggi.
Ketiga garis tinggi itu melalui suatu titik dan titik itu dinamakan *titik tinggi*

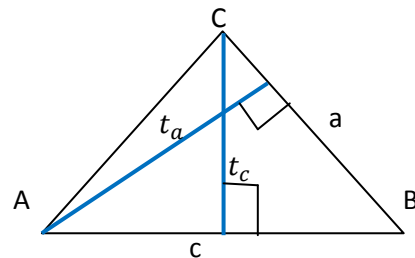
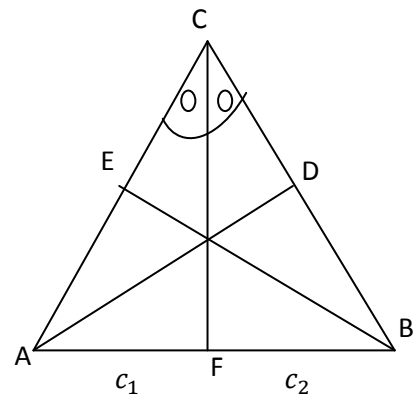
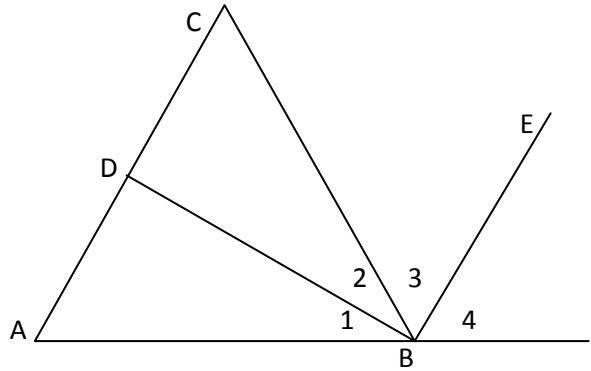
Formula penting

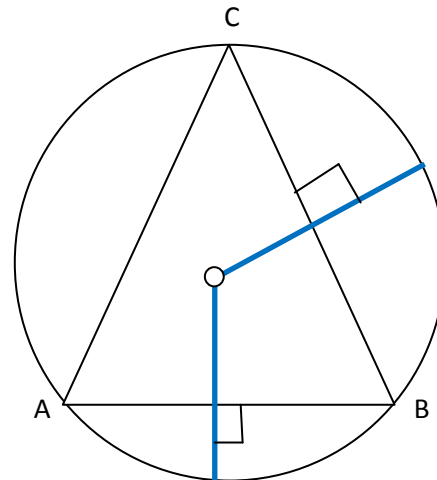
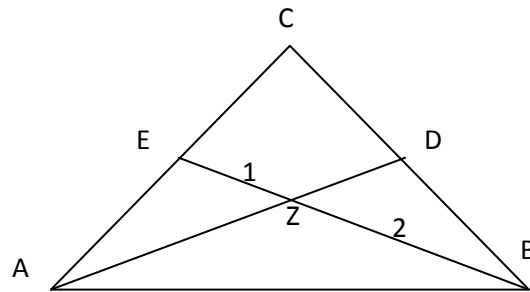
a) $t_a : t_c = c : a$

b) Jika $2s = a + b + c$, maka

$t_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$t_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

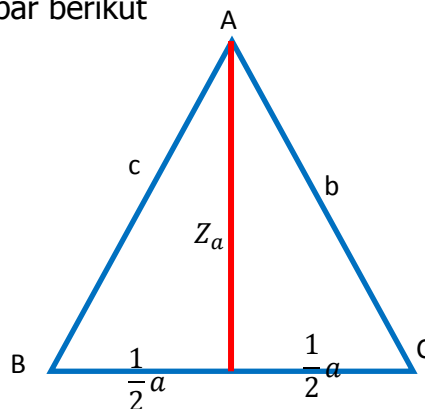
$t_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

- **Garis Berat(Median)**
  Adalah garis yang ditarik dari salah satu titik sudut dan memotong sisi di depannya serta membagi sisi(garis) di depannya menjadi 2 bagian sama besar(panjang)
  Sehingga dalam suatu segitiga terdapat 3 garis berat. Pertemuan ketiga garis berat selanjutnya dinamakan *titik berat*
  Formula penting
  ZA : ZD = BZ : ZE = 2 : 1

- **Garis Sumbu**
  Adalah garis yang ditarik dari salah satu tegak lurus dari pertengahan salah satu sisi dan memotong sisi yang berada di depannya
  Pada suatu segitiga ada 3 garis sumbu yang bertemu disatu titik yang disebut sebagai *titik sumbu* serta *titik sumbu merupakan pusat lingkaran luar segitiga*

Contoh C.10.2

1)Jika Z_a adalah garis berat ke sisi a maka tunjukkan bahwa

$$Z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

Bukti :

Perhatikan ilustrasi gambar berikut

Dengan menggunakan teorema Stewart, maka

$$Z_a^2 a = b^2 \frac{1}{2}a + c^2 \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a.\frac{1}{2}a.a$$

Sehingga

$Z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$ terbukti

15.2.Titik-titik yang melalui satu garis

Lihat juga **Garis Menelaus**

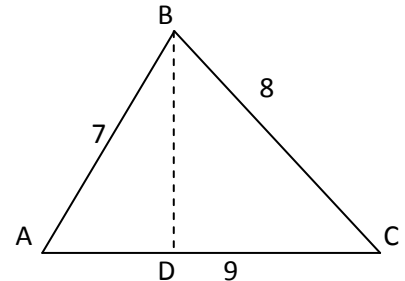
Contoh C.11

1)(OSK 2010)Diketahui AB, BC dan CA memiliki panjang masing-masing 7, 8 dan 9. Jika D adalah adalah titik tinggi dari B maka panjang AD adalah…

Jawab :

Diketahui panjang AB = 7 cm, BC = 8 cm dan CA = 9 cm

Perhatikanlah ilustrasi gambar berikut

langkah awal kita dapat menentukan luas terlebih dahulu dengan **formula Heron**, yaitu

$[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(8+9+7) = 12$

$[ABC] = \sqrt{12(12-8)(12-9)(12-7)} = \sqrt{12.4.3.5} = 12\sqrt{5}$ satuan luas

Selanjutnya

$[ABC] = [ABC]$

$\frac{1}{2}.alas(AC).tinggi(BD) = 12\sqrt{5}$

$\frac{1}{2}.9.BD = 12\sqrt{5} \Longrightarrow BD = \frac{8}{3}\sqrt{5}$

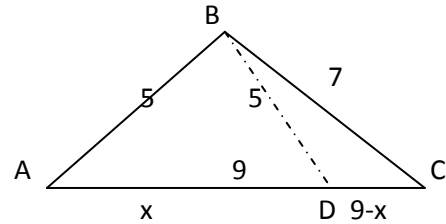
Sehingga $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 7^2 - \left(\frac{8}{3}\sqrt{5}\right)^2 = 49 - \frac{320}{9} = \frac{441-320}{9} = \frac{121}{9} \Longrightarrow AD = \frac{11}{3}$

Jadi, pajang $AD = \frac{11}{3}$

Catatan : *Kita juga dapat menggunakan formula Stewart untuk menemukan AD setelah luas dihitung terlebih dahulu, walaupun agak panjang tetapi sangat bermanfaat bagi kita yang belum terbiasa menggunakan rumus tersebut*

2)Diberikan segitiga ABC dengan AB = 5, BC = 7 dan AC = 9. Jika titik D pada sisi AC sehingga panjang BD = 5, maka AD : DC adalah…

Jawab :

Perhatikan ilustrasi gambar berikut

Kita dapat menggunakan formula Stewart, yaitu

$$BD^2.b = a^2.AD + c^2.DC - AD.DC.b$$

$$5^2.9 = 7^2.x + 5^2.(9-x) - x.(9-x).9$$

$$25.9 = 49x + 25.9 - 25x - 81x + 9x^2$$

$$9x^2 - 57x = 0 \implies 9x - 57 = 0 \implies x = \frac{57}{9} = AD$$

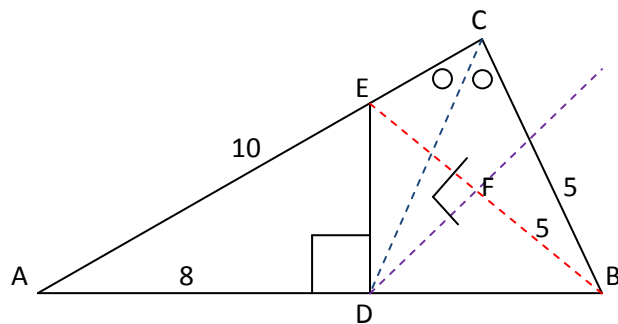
Selanjutnya kita mendapatkan $DC = 9 - x = 9 - \frac{57}{9} = \frac{24}{9}$

Sehingga AD:DC = $\frac{57}{9}:\frac{24}{9} = \frac{19}{8}$

3)Diberikan segitiga ABC dengan AC = 2BC = 10 cm. Dari titik C dibuat garis bagi, sehingga memotong AB di D. Kemudian dibuat juga garis DE ⊥ AB sehingga BC = EB dan dari titik D dibuat garis tegak lurus EB serta memotong EB di F. Jika panjang AD = 8 cm, maka panjang EF adalah…

Jawab :

Perhatikan ilustrasi gambar berikut

Ada beberapa hal yang kita dapatkan dari ilustrasi gambar tersebut, yaitu

- CD garis bagi, sehingga pusat lingkaran dalam segitiga ABC akan terletak pada sebuah titik pada garis tersebut
- Karena CD garis bagi maka berlaku AC : CB = AD : DB ⟹ 10 : 5 = 8 : DB ⟹ DB = 4 cm
- DE adalah garis sumbu, sehingga pusat lingkaran luar segitiga ABC akan terletak pada sebuah titik pada garis tersebut
- ΔBDE adalah segitiga siku-siku di D, demikian juga ΔDEF siku-siku di F

Selanjutnya untuk ΔBDE , $DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\ cm$

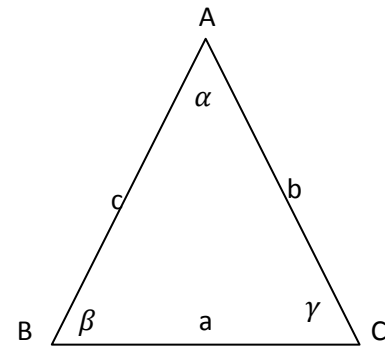
Dengan menggunakan luas segitiga ΔBDE didapatkan DF = $\frac{12}{5}cm$.

Langkah berikutnya, perhatikan segitiga ΔDEF, dengan rumus phytagoras kita dapatkan nilai EF = $\frac{9}{5}cm$

Jadi, panjang EF = $\frac{9}{5}cm$

16.Trigonometri

16.1.Formula dan Identitas Trigonometri

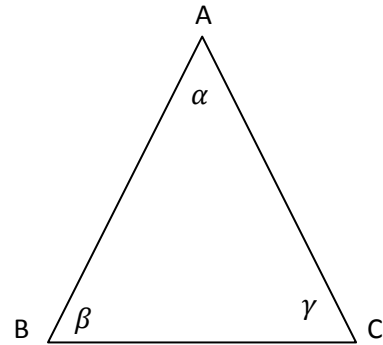
- $\sin A = \frac{1}{cosecan\ A}$
- $\cos A = \frac{1}{secan\ A}$
- $\tan A = \frac{1}{cotan\ A} = \frac{\sin A}{\cos A}$
- $sin^2 A + cos^2 A = 1 \begin{cases} sin^2 A = 1 - cos^2 A \\ cos^2 A = 1 - sin^2 A \end{cases}$
- $tan^2 A - secan^2 A = -1$
- $cotan^2 A - cosecan^2 A = -1$
- $\sin(A + B) = \sin A. cos\ B + \cos A. sin\ B$
- $\sin(A - B) = \sin A. \cos B - \cos A. \sin B$
- $\cos(A + B) = \cos A. \cos B - \sin A. \sin B$
- $\cos(A - B) = \cos A. \cos B + \sin A. \sin B$
- $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A. \tan B}$
- $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A. \tan B}$
- $\sin 2A = 2\ sinA. \cos A$
- $\cos 2A = cos^2 A - sin^2 A = 2cos^2 A - 1 = 1 - 2sin^2 A$
- $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - tan^2 A} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$
- $\cot 2A = \frac{cot^2 A - 1}{2 \cot A} = \frac{1}{2}(\cot A - \tan A)$
- $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos A)} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin A} - \sqrt{1 - \sin A}\right)$
- $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos A)} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin A} + \sqrt{1 - \sin A}\right)$
- $\tan \frac{1}{2} A = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$
- $\cot \frac{1}{2} A = \frac{\sin A}{1 - \cos A} = \frac{1 + \cos A}{\sin A} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}$
- $\sin 3A = 3 \sin A - 4sin^3 A$
- $\cos 3A = 4cos^3 A - 3 \cos A$
- $\tan 3A = \frac{3 \tan A - tan^3 A}{1 - 3tan^2 A}$
- $\sin 5A = 16sin^5 A - 20\ sin^3 A + 5 \sin A$
- $\cos 5A = 16cos^5 A - 20cos^3 A + 5 \cos A$

- $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right).\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B}$
- $\tan A - \tan A = \frac{\sin(A-B)}{\cos A.\cos B}$
- $\cot A + \cot B = \frac{\sin(B+A)}{\sin A.\sin B}$
- $\cot A - \cot B = \frac{\sin(B-A)}{\sin A.\sin B}$
- $sin^2A - sin^2B = cos^2B - cos^2A = \sin(A+B).\sin(A-B)$
- $cos^2A - sin^2B = cos^2B - sin^2A = \cos(A+B).\cos(A-B)$
- $\sin A.\sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$
- $\cos A.\cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))$
- $\sin A.\cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$
- $\cos A.\sin B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) - \sin(A-B))$
- $\tan A.\tan B = \frac{\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}$
- $\cot A.\cot B = \frac{\cot A+\cot B}{\tan A+\tan B}$
- $\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \frac{\tan A+\tan B}{\tan A-\tan B}$
- $\cos C = \frac{a\cos A-b\cos B}{b\cos A-a\cos B}$
- $-\cot A = \frac{\sin 3A-\sin A}{\cos 3A-\cos A}$
- $\frac{a+b}{a-c} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$
- $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$
- $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$
- $\tan 3A.\tan 2A.\tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$
- $\sin A + \sin(A+B) + \sin(A+2B) + \cdots + \sin(A+(n-1)B) = \frac{\sin\left(A+\frac{1}{2}(n-1)B\right).\sin\frac{1}{2}nB}{\sin\frac{1}{2}B}$,

  dengan $n \in \mathbb{Z}$ dan $\sin\frac{1}{2}B \neq 0$
- $\cos A + \cos(A+B) + \cos(A+2B) + \cdots + \cos(A+(n-1)B) = \frac{\cos\left(A+\frac{1}{2}(n-1)B\right).\sin\frac{1}{2}nB}{\sin\frac{1}{2}B}$,

  dengan $n \in \mathbb{Z}$ dan $\sin\frac{1}{2}B \neq 0$
- $(\cos x)(\cos 2x)(\cos 4x)(\cos 8x)\ldots(\cos 2^{n-1}x) = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$,untuk $x \in R\ dan \sin x \neq 0$
- $\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$,untuk $x \in R\ dan \sin x \neq 0$

- $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}}}_{n\,akar} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

16.2.Identitas Trigonometri dalam Segitiga

- $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$
- $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} + 1$
- $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$
- $sin^2 A + sin^2 B + sin^2 C = 2\cos A.\cos B.\cos C + 2$
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$
- $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$
- $\cot A.\cot B + \cot A.\cot C + \cot B.\cot C = 1$

Contoh C.12

1)Tentukanlah nilai dari $a + b$ dari $\cos 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{a+\sqrt{b}}$

Jawab :

$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) = \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

Perhatikan bahwa untuk

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = 6 + 2 + 2\sqrt{12} = 8 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = 4(2+\sqrt{3}) \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Sehingga $\cos 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ dan $a + b = 2 + 3 = 5$

2)Tentukan nilai $\cos 2013^0$ dan $\sin 2013^0$

Jawab :

Alternatif 1:

a) $\cos 2013^0 = \cos(5.360^0 + 213^0) = \cos 213^0 = -\cos(180^0 + 33^0) = -\cos 33^0$

b) $\sin 2013^0 = \sin(5.360^0 + 213^0) = \sin 213^0 = -\sin(180^0 + 33^0) = -\sin 33^0$

Alternatif 2:

a) $\cos 2013^0 = \cos(6.360^0 - 147^0) = \cos 147^0 = -\cos(180^0 - 33^0) = -\cos 33^0$

b) $\sin 2013^0 = \sin(6.360^0 - 147^0) = -\sin 147^0 = -\sin(180^0 - 33^0) = -\sin 33^0$

3)(Mat IPA UM UI 2009)Jika $\cos(A+B) = \frac{2}{5}$, $\cos A \cos B = \frac{3}{4}$, maka nilai $\tan A \tan B$ adalah…

Jawab :

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B = \frac{2}{5}$

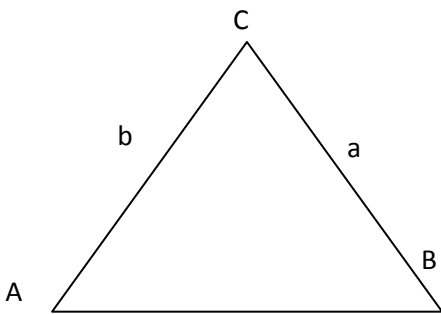
$\frac{3}{4} - \sin A \sin B = \frac{2}{5} \Longrightarrow \sin A \sin B = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$

Maka

$\tan A \tan B = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\left(\frac{7}{20}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{7}{20}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{7}{15}$

4)Tunjukkan bahwa jika $a \cos B = b \cos A$ maka ΔABC sama kaki

Jawab :

Perhatikan ilustrasi gambar berikut dan $\cos B = \frac{b}{a} \cos A$

Dengan menggunakan *aturan cosinus* kita mendapatkan

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \; dan \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Karena $\cos B = \frac{b}{a} \cos A$, maka

$$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\cos \mathrm{A} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \quad dan \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Sehingga $\frac{b}{a}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \Longrightarrow b^2+c^2-a^2 = a^2+c^2-b^2 \Longrightarrow a = b$

Jadi jelas bahwa ΔABC adalah segitiga sama kaki

16.3.Sudut-Sudut yang Berelasi

- $\sin(90^0 - A) = \cos A$
- $\cos(90^0 - A) = \sin A$
- $\tan(90^0 - A) = \cot A$
- $\cot(90^0 - A) = \tan A$
- $\sec(90^0 - A) = cosec\ A$
- $\sin(90^0 + A) = \cos A$
- $\cos(90^0 + A) = -\sin A$
- $\tan(90^0 + A) = -\cot A$
- $\cot(90^0 + A) = -\tan A$
- $\sec(90^0 + A) = -cosec\ A$
- $\sin(180^0 - A) = \sin A$
- $\cos(180^0 - A) = -\cos A$
- $\tan(180^0 - A) = -\tan A$
- $\cot(180^0 - A) = -\cot A$
- $\sin(180^0 + A) = -\sin A$
- $\cos(180^0 + A) = -\cos A$
- $\tan(180^0 + A) = \tan A$
- $\cot(180^0 + A) = \cot A$
- $\sin(270^0 - A) = -\cos A$
- $\cos(270^0 - A) = -\sin A$
- $\tan(270^0 - A) = \cot A$
- $\cot(270^0 - A) = \tan A$
- $\sin(270^0 + A) = -\cos A$
- $\cos(270^0 + A) = \sin A$
- $\tan(270^0 + A) = -\cot A$
- $\cot(270^0 + A) = -\tan A$
- $\sin(360^0 - A) = -\sin A$
- $\cos(360^0 - A) = \cos A$
- $\tan(360^0 - A) = -\tan A$
- $\cot(360^0 - A) = -\cot A$

16.4.Sudut Besar , Sudut Negatif dan Batas

- $\sin(-A) = -\sin A$
- $\cos(-A) = \cos A$
- $\tan(-A) = -\tan A$
- $\sin(n.360^0 + A) = \sin A$, n ∈ Bilangan Bulat
- $\cos(n.360^0 + A) = \cos A$, n ∈ Bilangan Bulat
- $\tan(n.360^0 + A) = \tan A$, n ∈ Bilangan Bulat
- $\sin(n.360^0 - A) = -\sin A$, n ∈ Bilangan Bulat
- $\cos(n.360^0 - A) = \cos A$, n ∈ Bilangan Bulat
- $\tan(n.360^0 - A) = -\tan A$, n ∈ Bilangan Bulat
- $-1 \leq \sin A \leq 1$
- $-1 \leq \cos A \leq 1$
- $-\infty \leq \tan A \leq \infty$

16.5.Nilai Sudut Istimewa

16.5.1.Untuk Sudut Batas

Trigon/A	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sin A	0	1	0	-1	0
cos A	1	0	-1	0	1
tan A	0	TD	0	TD	0

selanjutnya TD dituliskan sebagai ∞

16.5.2.Untuk Sudut Antara

Trigon/A	18^0	30^0	36^0	45^0	54^0	60^0	72^0
sin A	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$
cos A	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
tan A	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

16.6.Tanda Sudut

Kuadran/A	$0^0 < A < 90^0$	$90^0 < A < 180^0$	$180^0 < A < 270^0$	$270^0 < A < 360^0$
sin A	+	+	-	-
cos A	+	-	-	+
tan A	+	-	+	-

16.7.Persamaan Trigonometri

- sin $x = \sin A$
  $x = A + k.360^0$ atau $x = (180^0 - A) + k.360^0$ dengan $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = \cos A$
  $x = \pm A + k.360^0$ dengan $k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = \tan A$
  $x = A + k.180^0$ dengan $k \in \mathbb{Z}$
- Untuk bentuk
  $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\,(x-\theta)$
  dimana $\tan\theta = \frac{b}{a}$
  Syarat yang harus dipenuhi adalah $a^2 + b^2 \geq c^2$

Contoh C.13

1)Tentukan nilai dari $\tan 60^0 - \sin 60^0 - \tan 30^0$

Jawab :

$$\tan 60^0 - \sin 60^0 - \tan 30^0 = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

2)Hitunglah nilai eksak dari $\sin 18^0$!

Jawab :
Karena $4(18) = 72 = 90 - 18$ dan jika kita pilih $x = 18$
kemudian ,
$\sin 4x = \sin(90 - x) = \cos x$
$2\sin 2x \cos 2x = \cos x$
$2(2\sin x \cos x)(1 - 2sin^2 x) = \cos x$
$8sin^3 x - 4\sin x + 1 = 0$
Pilih $y = 2\sin x$ untuk menyederhanakan persamaan di atas, sehingga persamaan menjadi
$y^3 - 2y + 1 = 0$
$(y - 1)(y^2 + y - 1) = 0$
$y = 1$ atau $y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
Nilai yang memungkinkan untuk $y = 2\sin x$ adalah hanya $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ atau $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Sehingga $\frac{y}{2} = \sin x = \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

3)Tentukan nilai dari $\sin 18^0 . \cos 72^0$

Jawab : lihat tabel

$$\sin 18^0 . \cos 72^0 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{1}{16}\left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right) = \frac{1}{8}\left(3 - \sqrt{5}\right)$$

4)(Mat IPA UM UI 2009)Nilai maksimum fungsi $y = 4\sin x \sin(x - 60^0)$ akan dicapai x saat…

a) $x = 30^0 + k.180^0$, dengan k bilangan bulat

b) $x = 60^0 + k.180^0$, dengan k bilangan bulat

c) $x = 90^0 + k.180^0$, dengan k bilangan bulat

d) $x = 120^0 + k.180^0$, dengan k bilangan bulat

e) $x = 150^0 + k.180^0$, dengan k bilangan bulat

Jawab :

Perhatikan bahwa

$y = 4\sin x \sin(x - 60^0) \Leftrightarrow y = 2(2\sin x \sin(x - 60^0))$

$y = 2(\cos\ 60^0 - \cos(2x - 60^0))$

$y = 2\left(\frac{1}{2} - \cos(2x - 60^0)\right)$

$y = 1 - 2\cos(2x - 60^0)$

Sehingga nilai maksimum akan didapatkan saat $\cos(2x - 60^0) = -1$

$\cos(2x - 60^0) = \cos 180^0$

$2x - 60^0 = \pm 180^0 + k.360^0$

$2x = 60^0 \pm 180^0 + k.360^0 \Leftrightarrow x = 30^0 \pm 90^0 + k.180^0$

Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $x = 120^0 + k.180^0$, dengan k bilangan bulat

5)Tentukan nilai m supaya $(m + 3)\cos x + \ (m + 1)\sin x = 10$ memiliki penyelesaian adalah…

Jawab :

Syarat : $a^2 + b^2 \geq c^2$

$(m + 3)^2 + (m + 1)^2 \geq 10^2$

$m^2 + 6m + 9 + m^2 + 2m + 1 - 100 \geq 0$

$2m^2 + 8m - 90 \geq 0$

$m^2 + 4m - 45 \geq 0$

$(m + 9)(m - 5) \geq 0$

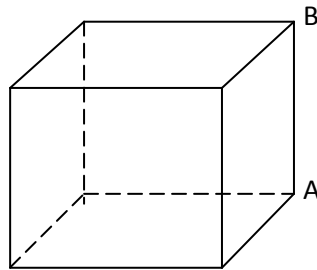
Jadi, batas nilai m adalah $m \leq -9$ atau $m \geq 5$

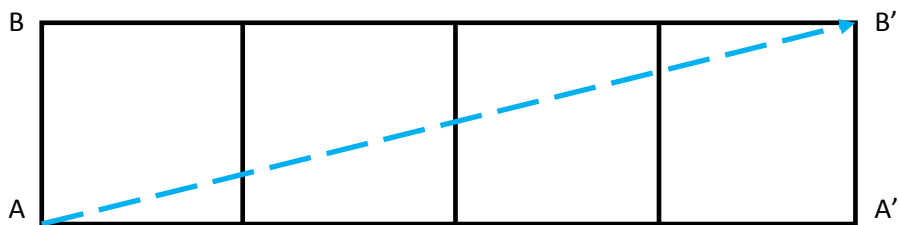
17.Bangun Ruang (Dimensi Tiga)

- Kubus
  Volume = sisi x sisi x sisi = $(\text{sisi})^3$

- Balok
  Volume = panjang x lebar x tinggi
- Bidang Empat dan Limas
  Volume = $\frac{1}{3}$ x luas alas x tinggi
- Limas segi Banyak
  Volume = $\frac{1}{3}$ x luas alas x tinggi
- Prisma(tegak)
  volume = luas alas x tinggi
- Tabung
  volume = luas alas x tinggi = luas lingkaran(alas) x tinggi
- Kerucut
  Volume = $\frac{1}{3}$ x luas lingkaran(alas) x tinggi
- Bola
  Luas permukaan = $4\pi r^2$
  Volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$
- Bidang Banyak Beraturan
  Menyesuaikan kondisi

Contoh C.14

Sebuah kubus tanpa tutup dan alas dengan rusuk 1 cm. Seekor semut berjalan dari A ke B melalui sisi semua kubus tersebut. Panjang lintasan terpendek semut tersebut adalah…

Jawab :

Perhatikan bahwa kubus di atas tanpa tutup dan alas, sehingga jaring-jaring kubusnya adalah

Sehingga panjang AB’ = $\sqrt{(AA')^2 + (A'B')^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$ cm

D.KOMBINATORIKA

1.Prinsip Pencacahan

1.1.Aturan Dasar Menghitung dalam Pengisian Tempat

- Jika suatu kejadian pertama dapat dilakukan dengan m cara dan kejadian kedua dapat lakukan dengan n cara berbeda maka kedua hal tersebut dapat dilakukan dalam $m.n$ cara yang berbeda.
- Diperumum: Jika suatu kejadian pertama dapat dilakukan dengan a_1 cara berbeda, kejadian kedua dapat dilakukan dengan a_2 cara berbeda dan begitu seterusnya maka semua kejadian tersebut dapat dilakukan secara berurutan dalam $(a_1.a_2 \dots)$ cara yang berbeda.

Contoh D.1

1)Berapkah banyak cara menyusun huruf-huruf S, E, R, U, P dan A

a)Jika huruf pertama vokal(huruf hidup)

b)Jika huruf pertama konsonan(huruf mati)

Jawab :

1.a)Perhatikan tabel berikut

Langkah paling awal kita lihat ada berapa huruf vokal, disoal di atas vokalnya E, U, A , jadi ada 3, sehingga kita punya 3 pilihan dan kita letakkan di baris yang satu kolom dengan ini	Langkah berikutnya, kita tadi telah mengambil 1 huruf vokal, sehingga huruf yang tersisa tinggal 5 dengan rincian 2 vokal dan 3 konsonan, sehingga di baris di	Begitu seterusnya, dari langkah pada kolom satu dan dua berarti kita sudah mengambil 2 huruf, sehingga sisa huruf ada 4. Berarti kita punya 4 pilihan meletakkan	Sisa huruf setelah diambil dari langkah sebelumnya adalah 3 huruf. Berarti kita memiliki 3 pilihan untuk meletakkan huruf sisa secara bebas di satu tempat tersedia	Huruf sisa tinggal 2. Sehingga kita punya 2 pilihan meletakkan huruf tersebut	Sisa tinggal 1 huruf, berarti tidak ada pilihan meletakkan. Sehingga kita tinggal letakkan saja di satu tempat sisa yang tersedia

	bawah ini kita isi 5	huruf			
3	5	4	3	2	1

Sehingga banyak cara meletakkan dengan huruf pertama vokal adalah 3x5x4x3x2x1=360 cara

1.b)Dengan cara semisal di atas, maka banyak cara meletakkan dengan huruf pertama konsonan adalah = 3x5x4x3x2x1=360 cara

2)Ada 4 siswa dimohon untuk duduk sejajar, maka banyak cara mereka duduk adalah…

Jawab :

4	3	2	1	4x3x2x1=24 cara

3)Aziz ingin membentuk bilangan *empat* angka yang kurang dari 2013 yang angka-angkanya diambil dari 0, 1, 2, 3, 7, 8 dan 9. Ada berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk jika

a)angka-angkanya boleh berulang

b)angka-angkanya tidak boleh berulang

Jawab :

3.a) perhatikan ada 7 bilangan yaitu 0, 1, 2, 3, 7, 8 dan 9

1 pilihan	6 pilihan	5 pilihan	4 pilihan	1x6x5x4=120

3.b) karena boleh berulang, maka

1 pilihan	7 pilihan	7 pilihan	7 pilihan	1x7x7x7=343

1.2.Faktorial

Sifat-sifat yang berlaku

- $n! = n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)\dots 4.3.2.1$
- 0! = 1
- 1! = 1
- 2! = 2.1 = 2
- 3! = 3.2.1 = 6
- 4! = 4.3.2.1= 24

- $(r-1)! = 1.2.3.4 \ldots (r-1)$
- n.n! = $\left((n+1)-1\right).n! = (n+1).n! - n!$ = (n+1)! – n!
- $\frac{n!}{n} = (n-1)!$
- $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{(n-1)!} = n$
- $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} = n^2 - n$
- $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2).(n+1).n!}{n!} = n^2 + 3n + 2$
- $\frac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1).(n-2) \ldots (n-k+1)$, dengan $k \le n$
- $\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2) \ldots n$, dengan $k \le n$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{k!2^k} = \sum_{k=1}^{n} 1.3.5 \ldots (2k-1)$
- $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{n!}$

Contoh D.2

1)Tentukan nilai dari $\frac{(3!)!}{6}$

Jawab :

$\frac{(3!)!}{6} = \frac{(6)!}{6} = \frac{1.2.3.4.5.6}{6} = 1.2.3.4.5 = 120$

2)Tunjukkan bahwa $\frac{n!}{(n-r)!} = n.(n-1).(n-2) \ldots (n-r+1)$

Jawab :

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n.(n-1).(n-2) \ldots (n-r+1).(n-r)!}{(n-r)!} = n.(n-1).(n-2) \ldots (n-r+1)$$

2.Permutasi

- Penyusuan elemen baik seluruh ataupun sebagian dengan memperhatikan urutan
- Diperumum : Penyusunan r elemen berurutan dari n elemen yang berbeda, dengan $r \le n$, adalah $P_r^n = {}_nP_r = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
- Permutasi dengan n unsur yang memuat beberapa unsur $n_1, n_2, n_3, \ldots$ yang sama adalah $P = \frac{n}{n_1!.n_2!.n_3!\ldots}$ dengan $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots \le n$
- Permutasi berulang untuk r elemen dari n unsur adalah $P_{perulangan} = n^r$
- Permutasi siklis untuk n unsur berbeda adalah $P_{siklis} = (n-1)!$

3.Kombinasi

- Penyusuan elemen baik seluruh ataupun sebagian dengan *tidak* memperhatikan urutan
- Diperumum : Penyusunan r elemen berurutan dari n elemen yang berbeda, dengan tidak memperhatikan urutan serta $r \leq n$, adalah
  $C_r^n = {}_nC_r = C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$
- Banyak jabat tangan adalah $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- Banyak garis yang dapat dibuat dari n titik jika tidak ada 3 titik yang segaris adalah $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- Banyak diagonal segi-n konveks adalah $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

Contoh D.3

1)Ada berapa banyak cara menyusun 3 orang untuk menduduki ketua OSIS, wakil dan sekretarisnya jika ada 8 orang yang ditunjuk

Jawab :

Karena ada susunan maka kita menggunakan formula permutasi, yaitu

$$P_r^n = {}_nP_r = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow P_3^8 = {}_8P_3 = P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 8.7.6 = 336$$

2)Bagaimana jika pada soal no.2) kasusnya hanya memilih 3 orang saja dari 8 orang yang ditunjuk

Jawab :

Perhatikan bahwa tidak ada posisi yang dapat membedakan dari 3 orang yang dipilih, sehingga kita dapat menggunakan formula kombinasi, yaitu

$$C_r^n = {}_nC_r = C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} \Rightarrow C_3^8 = C(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!.3!} = \frac{8.7.6.5!}{5!.3.2.1} = 56$$

3)Jika dalam suatu pertemuan terdapat 5 orang dan mereka saling berjabat tangan dengan orang satu kali berapakah banyak jabat tangan yang terjadi adalah…

Jawab :

Gunakan aturan combinasi untuk menyelesaikan kasus ini, yaitu

$$C_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{1.2.3!} = 10$$

Jadi ada 10 jabat tangan yang terjadi

4)(Mat IPA-UM UGM 2008)Ada 5 pasangan tamu pada suatu pesta. Jika masing-masing tamu belum saling kenal kecuali dengan pasangannya dan mereka saling berjabat tangan dengan orang yang belum mereka kenal, maka banyak jabat tangan yang terjadi adalah…

Jawab :

Perhatikan bahwa pada acara pesta tersebut sebenarnya ada 10 orang, karena masing-masing berpasangan, maka

$$C_2^{10} - 5 = \frac{10!}{(10-2)!2!} - 5 = \frac{10!}{8!.2!} - 5 = \frac{10.9.8!}{1.2.8!} - 5 = 45 - 5 = 40$$

Jadi ada 40 jabat tangan yang terjadi

5)(Mat Das UM UI 2009)Dari huruf-huruf S, I, M, A dan K dapat dibuat 120 "kata". Jika "kata" ini disusun alfabetis, maka kata "SIMAK" akan berada pada urutan

Jawab : (prinsip yang digunakan adalah *pengisian tempat*(filling slot) atau *permutasi*)

Perhatikan bahwa ada 5 huruf S, I, M, A dan K, kalau kita urutkan secara alfabetis menjadi A, I, K, M dan S

Sehingga kalau kita susun secara urut,

Huruf pertama	Ke-2	Ke-3	Ke-4	Ke-5	Total cara penempatan
A	4	3	2	1	1.4.3.2.1=24
I	4	3	2	1	1.4.3.2.1=24
K	4	3	2	1	1.4.3.2.1=24
M	4	3	2	1	1.4.3.2.1=24
S	…	…	…	…	…

Selanjutnya kita lihat susunan dengan huruf awal S, karena mintanya **alfabetis**, jika

- S huruf ke-1, A ke-2, maka 3 huruf sisa permutasinya adalah 6
- S huruf ke-1, I ke-2, maka 3 huruf sisa permutasinya adalah 6 juga
  Yaitu SIAKM, SIAMK, SIKAM, SIKMA, **SIMAK** dan SIMKA. Sehingga SIMAK posisi 5 secara alfabetis dengan huruf awal S

Jadi, **SIMAK** secara *alfabetis* akan berada pada urutan ke 24 + 24 + 24 + 24 + 6 + 5 = 107

6)Buktikan bahwa

$$C_n^{2n+1} = C_{n+1}^{2n+1}$$

Bukti :

$C_n^{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-n)!n!} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-(n+1))!(n+1)!} = C_{n+1}^{2n+1}$ terbukti

4.Koefisien Binomial

4.1.Koefisien Binom dengan bentuk segitiga pascal

n =0	**1**
n = 1	**1 1**
n = 2	**1 2 1**
n = 3	**1 3 3 1**
n = 4	**1 4 6 4 1**
n = 5	**1 5 10 10 5 1**
n = 6	**1 6 15 20 15 6 1**
n = ...dst	**...**

4**.2.Penjabaran Bentuk** $(a+b)^n$ **dengan kondisi** $\boldsymbol{a+b \neq 0}$ **,** $\boldsymbol{a \neq 0}$**,** $\boldsymbol{b \neq 0}$

- $(a+b)^0 = 1$
  $(a+b)^1 = a+b$
  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
  dst
- Diperumum :
  1) $(a+b)^n = {}_nC_0\, \boldsymbol{a^n . b^0} + {}_nC_1\, \boldsymbol{a^{n-1} . b^1} + {}_nC_2\, \boldsymbol{a^{n-2} . b^2} + \cdots + {}_nC_{n-1}\, \boldsymbol{a^1 . b^{n-1}} + {}_nC_n\, \boldsymbol{a^0 . b^n}$
  atau
  2) $(a+b)^n = \binom{n}{0}\boldsymbol{a^n . b^0} + \binom{n}{1}\boldsymbol{a^{n-1} . b^1} + \binom{n}{2}\boldsymbol{a^{n-2} . b^2} + \cdots + \binom{n}{n-1}\boldsymbol{a^1 . b^{n-1}} + \binom{n}{n}\boldsymbol{a^0 . b^n}$
- Formula untuk koefisien Binom (untuk $n \in \mathbb{N}$)

(a) $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^{r} = (a+b)^{n} = \binom{n}{0}a^{n} + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^{n}$
(b) $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^{n}$
(c) $\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n.2^{n-1}$
(d) $\sum_{r=1}^{n} r^{2}\binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}$
(e) $\sum_{r=1}^{n} r^{3}\binom{n}{r} = n^{2}(n+3)2^{n-3}$
(f) $\sum_{r=0}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{r+1} = \binom{n}{0} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{2}}{3} + \cdots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

4.3. Formula dan identitas yang berkaitan dengan Kombinasi dan segitiga pascal

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)!}{2}$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$
- $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{n+r}$

Contoh D.4

1)Tentukan nilai dari

$$\binom{2013}{0} + \binom{2013}{1} + \binom{2013}{2} + \cdots + \binom{2013}{2013}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^{n}$, sehingga

$$\binom{2013}{0} + \binom{2013}{1} + \binom{2013}{2} + \cdots + \binom{2013}{2013} = 2^{2013}$$

2)Tentukan nilai dari

$$\binom{2013}{1} + 2\binom{2013}{2} + 3\binom{2013}{3} + \cdots + 2013\binom{2013}{2013}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n.2^{n-1}$, sehingga

$$\binom{2013}{1} + 2\binom{2013}{2} + 3\binom{2013}{3} + \cdots + 2013\binom{2013}{2013} = 2013.2^{2012}$$

5.Peluang

5.1.Ruang Sampel

Dalam percobaan pelemparan 2 koin secara bersamaan, jika sisi angka adalah A dan sisi gambar adalah G, maka kemungkinan hasil yang akan kita dapatkan adalah

$$\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}),(\boldsymbol{A},\boldsymbol{G}),(\boldsymbol{G},\boldsymbol{A}),(\boldsymbol{G},\boldsymbol{G})\}$$

Beberapa hal yang berkenaan dengan percobaan di atas adalah

- $\{(A,A),(A,G),(G,A),(G,G)\}$ dinamakan himpunan *ruang sampel* percobaan
- Masing-masing elemen dinamakan *titik sampel*
- Misalkan $\{(A,A),(G,A)\}$ dinamakan *kejadian*
- Himpunan dari ruang sampel adalah *kejadian* dari suatu percobaan

5.2.Peluang

- Formula utama $P(A)=\frac{a}{n}$ dengan $\begin{cases} P(A)\ adalah\ peluang\ kejadian\ A \\ a\ \ elemen \\ n\ \ semua\ hasil\ percobaan \end{cases}$
- $P(A)=0$ adalah suatu *kemustahilan* sedang $P(A)=1$ adalah suatu *kepastian*
- Kisaran nilai peluang adalah $0\le P(A)\le 1$
- *Komplemen* dari $P(A)$ adalah $P'(A)$ yang besarnya $P'(A)=1-P(A)$
- *Frekuensi Harapan* adalah $F(M)=P(M)$ x n
  Jika M adalah suatu kejadian di ruang sampel S dan $P(M)$ adalah peluang terjadinya M dalam n kali percobaan

5.3.Peluang kejadian Majmuk

- Komplemen $P'(A)=1-P(A)$ atau $P(A)=1-P(A')$
- Dua kejadian saling lepas $P(AUB)=P(A)+P(B)$
- Dua kejadian saling bebas
  a)Dengan pengembalian $P(A\cap B)=P(A).P(B)$
  b)Dengan tanpa pengembalian $P(A\cap B)=P(A).P(B/A)$, kadang disebut juga *peluang bersyarat* atau *tidak saling bebas*

Contoh D.5

1)Jika dalam kantong terdapat 6 bola merah dan 4 bola biru akan diambil 2 bola secara acak, maka berapa peluang mendapatkan sedikitnya 1 bola biru

Jawab :

Alternatif 1:

Misalkan A adalah kejadian mendapatkan 2 bola itu paling sedikit 1 bola biru, maka

$$P(A) = \frac{C_1^4 . C_1^6 + C_2^4}{C_2^{10}} = \frac{\frac{4!}{1!\,3!} \cdot \frac{6!}{1!\,5!} + \frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{10!}{2!\,8!}} = \frac{4.6 + 6}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

Alternatif 2:

Dengan menggunakan prinsip komplemen, yaitu A' kejadian yang terambil keduanya merah(tidak ada biru satupun), maka berdasarkan uraian pada jawaban alternatif 1 kita mendapatkan

$$P(A') = \frac{C_2^6}{C_2^{10}} = \frac{\frac{6!}{2!\,4!}}{\frac{10!}{2!\,8!}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

Sehingga

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Jadi pengambilan 2 bola dengan minimal yang terambil 1 biru secara acak peluangnya adalah $\frac{2}{3}$

2)(Mat Das UM UGM 2008)Anda memiliki tetangga baru yang belum anda kenal katanya memiliki 2 anak. Anda tahu salah satu anaknya adalah laki-laki. Tentukan peluang kedua anak tetangga baru anda adalah laki-laki

Jawab :

Perhatikan kemungkinan semua anaknya adalah LL, LP=PL $\Longrightarrow n(S) = 2$

Misalkan B adalah kejadian 2 anak semuanya laki-laki, maka peluangnya adalah

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

3) Jika dalam kantong terdapat 6 bola merah dan 4 bola biru akan diambil 2 bola secara berturut-turut, maka berapakah peluang mendapatkan 2 bola biru

a)Jika dengan pengembalian

b)Jika tanpa pengembalian

Jawab :

3a)Jika dengan pengembalian maka misalkan C adalah kejadiannya pengambilan pertama biru dan D kejadian pengambilan kedua juga biru adalah

$$P(C \cap D) = P(C)xP(D) = \frac{4}{10}.\frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$

3b)Jika tanpa pengembalian maka peluangnya adalah

$$P(C \cap D) = P(C)\text{x}P(D/C) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

4)(Mat Das UM UI 2009)Ada 15 kunci berbeda dan hanya tepat satu kunci yang dapat digunakan untuk membuka sebuah pintu. Jika kunci diambil satu persatu tanpa pengembalian, maka peluangkunci yang terambil dapat digunakan untuk membuka pintu pada pengambilan ketiga adalah…

Jawab :

Perhatikan bahwa masing-masing dari 15 kunci semuanya berbeda. Misalkan A adalah kejadian pengambilan pertama, B kedua dan C ketiga, maka peluangnya sampai pengambilan ketiga adalah

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\text{x}P(B)\text{x}P(C) = \left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{1}{14}\right)\left(\frac{1}{13}\right)$$

6.Prinsip Inklusi-Eksklusi(PIE)

- A adalah subhimpunan dari S
- A’ = $\bar{A}$ = $\{x \in S | x \notin A\}$ adalah komplemen A
- $|S| = |A| + |\bar{A}|$
- Hukum de Morgan mengatakan: $\begin{cases} \overline{AUB} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{A \cap B} = \bar{A}U\bar{B} \end{cases}$
- $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |S| - |AUB| = |S| - |A| - |B| + |A \cap |$
- $|A| = n(A)$
- $|B| = n(B)$
- $|AUB| = n(AUB)$
- $|B - A| = |B| - |A \cap B|$
- $|AUB| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|AUBUC| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- Bentuk Umum PIE :
  Jika diberikan n buah himpunan maka kardinalitas dari gabungan n buah himpunan tersebut adalah

$|A_1 U A_2 U A_3 U \ldots U A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i<j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n|$

7.Faktor Pembilang

Definisi : Untuk semua bilangan asli x, fungsi dasar x, dilambangkan dengan $\lfloor x \rfloor$ yaitu bilangan bulat terbesar yang kurang dari x

- $\lfloor x \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari x juga disebut fungsi tangga
- $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ adalah banyaknya bilangan bulat positif m yang kurang dari atau sama dengan bilangan bulat positif n

Contoh D.6

1)Jika ada 2013 siswa yang disurvei diperoleh data bahwa ada 1000 anak suka Akuntansi dan 900 suka Matematika. Jika ada 1500 tidak menyukai keduanya maka berapa siswa yang menyukai keduanya?

Jawab :

Misalkan A adalah himpunan siswa yang menyukai akuntansi dan M adalah himpunan siswa yang menyukai matematika

|S| = 2013, |A| = 1000, |M| = 900, |(AUM)'| = 1500

|S| = |(AUM)| + |(AUM)'| sehingga diperoleh |(AUM)| = |S| - |(AUM)'| = 2013 – 1500 = 513

Perhatikan

|(AUM)| = |A| + |M| - |A∩M| ⟹ |A∩M| = |A| + |M| - |AUM| = 1000 + 900 – 513 = 1387

Jadi banyak siswa yang menyukai keduanya ada 1387 siswa.

2)Carilah banyaknya bilangan antara 1 dan 2013, yang tidak habis dibagi oleh 5, 6 dan 8

Jawab :

Perhatikan bahwa $S = \{1,2,3, \ldots ,2013\}$ dan

$$A_1 = \{x \in S | x\ habis\ dibagi\ 5\}$$

$$A_2 = \{x \in S | x\ habis\ dibagi\ 6\}$$

$$A_3 = \{x \in S | x\ habis\ dibagi\ 8\}$$

dan banyaknya bilangan yang tidak habis dibagi oleh 5, 6 dan 8 adalah $n(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$

Perhatikan juga bahwa

$$n(A_1) = \left\lfloor \frac{2013}{5} \right\rfloor = 402$$

$$n(A_2) = \left\lfloor \frac{2013}{6} \right\rfloor = 335$$

$$n(A_3) = \left\lfloor \frac{2013}{8} \right\rfloor = 251$$

Selanjutnya untuk $A_1 \cap A_2$ adalah semua bilangan yang habis dibagi 5 dan 6. karena KPK dari 5 dan 6 adalah 30, maka

$$n(A_1 \cap A_2) = \left\lfloor \frac{2013}{30} \right\rfloor = 67$$

Dengan langkah yang kurang lebih sama, maka

$$n(A_1 \cap A_3) = \left\lfloor \frac{2013}{40} \right\rfloor = 50$$

$$n(A_2 \cap A_3) = \left\lfloor \frac{2013}{24} \right\rfloor = 83$$

Karena KPK dari 5, 6 dan 8 adalah 120, maka

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left\lfloor \frac{2013}{120} \right\rfloor = 16$$

Sehingga

$$n(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = n(S) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$n(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = n(S) - \big(n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\big)$

$n(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 2013 - 402 - 335 - 251 + 67 + 50 + 83 - 16 = 1209$

Jadi, banyaknya bilangan antara 1 dan 2013, yang tidak habis dibagi oleh 5, 6 dan 8 ada sebanyak 1209.

8.Prinsip Sarang Merpati/Pigeon Hole Principle(PHP)

- Jika ada n sarang burung merpati dan ada $n+1$ burung merpati maka dapat dipastikan bahwa ada 1 sarang yang ditempati lebih dari 1 burung merpati. *Hal demikian wajar karena antara Burung dengan sarangnya lebih banyak burungnya atau*
- Jika ada n merpati menempati m sarang dan m < n, maka paling sedikit satu sarang akan berisi 2 merpati atau lebih.
- *Perluasan Prinsip Sarang Merpati(The Extended Pigeon Hole Principle)* :
  Jika n merpati menempati m sarang, maka salah satu sarang akan terisi paling sedikit $\left(\left\lfloor\frac{n-1}{m}\right\rfloor+1\right)$ merpati.

  Contoh Kasus Dalam Kehidupan Sehari-hari , yaitu :
- Di Jawa Tengah khususnya di Purwodadi ada minimal 2 orang memiliki tinggi yang sama(dalam cm)
- Jika di kelas ada 3 orang pasti ada 2 orang berjenis kelamin sama
- Jika di kelas ada 8 orang pasti ada 2 orang memiliki hari kelahiran sama
- Jika di kelas ada 13 murid pasti ada 2 murid di antaranya memiliki bulan kelahiran yang sama
- Jika di kelas ada 32 orang maka dapat dipastikan ada 2 murid memiliki tanggal kelahiran yang sama
- Bentuk Umum : Jika ada benda lebih dari n objek ditempatkan dalam n kotak, maka akan ada satu kotak yang berisi lebih dari satu objek.

Contoh D.7

1)Tiap ada kumpulan 8 orang, dapat dipastikan 2 diantaranya akan memiliki hari kelahiran yang sama

2)Tunjukkan bahwa jika 6 bilangan dipilih dari 1 sampai 10, maka 2 bilangan di antaranya akan berjumlah 11.

Jawab :

Perhatikan bahwa, sebagai langkah awal kita buat 5 himpunan berbeda, tiap-tiap himpunan terdiri dari 2 bilangan yang mana jika dijumlahkan hasil angkanya sama dengan 11, seperti berikut ini: $\{1,10\},\{2,9\},\{3,8\},\{4,7\}\ dan\ \{5,6\}$. Tiap 6 bilangan yang dipilih pasti termasuk salah satunya dari 5 himpunan ini. Karena hanya ada 5 himpunan, **Prinsip Sarang Merpati** menjelaskan kepada kita bahwa 2 bilangan yang dipilih termasuk dalam himpunan yang sama. Bilangan-bilangan ini berjumlah 11.

3)Tunjukkan bahwa jika ada 30 orang dapat dipastikan 5 orang di antaranya akan memiliki hari kelahiran yang sama

Jawab :

Misalkan 30 orang kita ibaratkan *merpati* dan hari kelahiran kita ibaratkan *sarang merpatinya* sehingga ada 7(*hari/sarang merpati*). Menurut **Perluasan Prinsip Sarang Merpati** dimana $n = 30\ dan\ m = 7$ paling sedikit $\left\lfloor\frac{(30-1)}{7}\right\rfloor + 1\ atau\ 5$ orang pasti memiliki hari kelahiran yang sama.

4)Tunjukkan bahwa jika ada 30 buku di sebuah perpustakaan yang memiliki 61327 total halaman, maka salah satu buku pasti memiliki paling sedikit 2045 halaman

Jawab :

Misalkan halaman buku adalah *merpati* dan buku adalah *sarang merpatinya* sehingga dapat dipastikan salah satu buku-sesuai dengan **Perluasan Prinsip Sarang Merpati**-akan memiliki paling sedikit $\left\lfloor\frac{(61327-1)}{30}\right\rfloor + 1\ atau\ 2045$ halaman buku.

5)Tunjukkan bahwa paling sedikit ada 6 cara berbeda untuk memilih 3 bilangan dari 1 sampai 10 sehingga semuanya memiliki jumlah yang sama

Jawab :

Perhatikan bahwa banyak cara memilih 3 bilangan dari 10 bilangan yang ada sebanyak $C_3^{10} = 120$ cara

Jumlah paling kecil adalah 1 + 2 + 3 = 6 dan paling banyak adalah 8 + 9 + 10 = 27, sehingga kita memiliki 22 penjumlahan 3 bilangan dari jumlah 6 sampai 27. Misalkan A adalah sebuah himpunan penjumlahan 3 bilangan dari 1 sampai 10, sehingga $A = \{6,7,8,\dots,27\}$

Jika tiap penjumlah kita ibaratkan *sarang merpati*, maka dapat dipastikan paling sedikit satu *sarang merpati* berisi $\left\lfloor\frac{(120-1)}{22}\right\rfloor + 1\ atau\ 6$ merpati.

Yakni satu sarang merpati berisi paling sedikit 6 cara yang berbeda dimana 3 bilangan akan memiliki jumlah yang sama.

9.Rekurensi

lihat tentang rekurensi, pada bahasan sebelumnya

A. ALJABAR (ALGEBRA)

1. Hitunglah
   1+22+333+4444+55555+666666+7777777+88888888+999999999

   Jawab :
   1+22+333+4444+55555+666666+7777777+88888888+999999999
   = (1+999999999)+(22+88888888)+(333+7777777)+(4444+666666+55555
   = (1000000000)+(88888910)+(7778110)+(671110)+55555
   = 1097393685

2. Jika $= 201320132013\ X\ 2014201420142014$, dan
   $B = 2013201320132013\ X\ 201420142014$. Berapakah nilai dari $A - B$?

   Jawab :
   Sebenarnya untuk urusan perkalian bilangan bulat mungkin kebanyakan kita tidak banyak mengalami kesulitan tetapi jadi lain apabila sebuah bilangan disusun sedemikian rupa, misal seperti soal di atas apa lagi bentuknya sual uraian, mungkin kita akan berkata pada diri kita sendiri soal ini apa bila dikerjkan apa adanya jelas membutuhkan ketelitian dalam mengalikannya terus baru kemudian dikurangkan, kalau kita ingin pakai kalkulator jelas tidak mungkin pasti di layar akan muncul kata error.
   Adakah cara lain, eh ternyata ada coba anda perhatikan perkalian 2 bilangan berikut;
   1234 x 10001 = 12341234, terus untuk
   1234 x 100010001 = 123412341234.
   Dari perkalian 2 bilangan di atas anda pasti tahu bagai mana cara yang tepat dalam menyelesaikan soal di atas. ya, anda benar
   $A = 201320132013\ X\ 2014201420142014$ = 2013 x 100010001 x 2014 x 1000100010001, dan
   $B = 2013201320132013\ X\ 201420142014$ = 2013 x 1000100010001 x 2014 x 100010001.
   Sampai langkah di sini sudah terbayang dalam benak kita kalau jawabannya jelas A – B = 0.

3. Tentukan nilai dari

   $$2013.(a-q).(b-q).(c-q).(d-q)\ldots(z-q)$$

   Jawab :
   Perhatikan bahwa pada soal di atas terdapat perkalian dengan $(q-q)=0$, sehingg mengakibatkan

   $$2013.(a-q).(b-q).(c-q).(d-q)\ldots(q-q)\ldots(z-q)=0$$

   Jadi, $2013.(a-q).(b-q).(c-q).(d-q)\ldots(z-q)=0$

4. Tentukan nilai dari

$$\left(9-\frac{1}{100}\right)^3.\left(9-\frac{2}{100}\right)^3.\left(9-\frac{3}{100}\right)^3\dots\left(9-\frac{2013}{100}\right)^3$$

Jawab :

Perkalian bilangan di atas terdapat bilangan $\left(9-\frac{900}{100}\right)^3=0^3=0$.

Jadi ,

$$\left(9-\frac{1}{100}\right)^3.\left(9-\frac{2}{100}\right)^3.\left(9-\frac{3}{100}\right)^3\dots\left(9-\frac{2013}{100}\right)^3=0$$

5. Tentukan nilai dari

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2013}\right)$

Jawab :

Kita tahu bahwa $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, dan $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ demikian seterusnya

Sehingga

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2013}\right)=\frac{1}{\cancel{2}}.\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}.\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\dots\frac{\cancel{2011}}{\cancel{2012}}.\frac{\cancel{2012}}{2013}=\frac{1}{2013}$$

Jadi,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2013}\right)=\frac{1}{2013}$$

6. Tentukan nilai dari

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2013}\right)$

Jawab :

Pembahasan diserahkan kepada pembaca

7. Tentukan nilai dari

$\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\dots\left(1-\frac{2}{2013}\right)$

Jawab :

Pembahasan diserahkan kepada pembaca

8. Tentukan nilai dari

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)$

Jawab :

Pembahasan diserahkan kepada pembaca

9. Hitunglah $1+2+3+\cdots+2013$

Jawab :
perhatikan bahwa
$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$
Sehingga $1+2+3+\cdots+2013 = \frac{1}{2}(2013)(2013+1) = \frac{1}{2}(2013)(2014)$

10. Hitunglah $1-2+3-4+\cdots+2013$

Jawab :
Alternatif 1 :
Gunakan cara seperti di atas yaitu
$1-2+3-4+\cdots+2013 = \sum_{i=1}^{2013} i - 2\sum_{i=1}^{1006} 2i = \sum_{i=1}^{2013} i - 4\sum_{i=1}^{1006} i$
Sehingga
$1-2+3-4+\cdots+2013 = \sum_{i=1}^{2013} i - 4\sum_{i=1}^{1006} i =$
$\frac{1}{2}(2013)(2014) - 4\left(\frac{1}{2}\right)(1006)(1007) = (2013)(1007) - (2012)(1007) = 1007$

Alternatif 2 :
$1-2+3-4+\cdots+2013 = \underbrace{(-1)+(-1)+(-1)}_{sebanyak\ 1006} + 2013 = -1006 + 2013 = 1007$

11. Hitunglah $1^2+2^2+3^2+\cdots+2013^2$

Jawab :
Perhatikan
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1)$
Sehingga $1^2+2^2+3^2+\cdots+2013^2 = \frac{1}{6}(2013)(2014)(4029)$

12. Hitunglah $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+2013^2$

Jawab :
$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+2013^2 = \sum_{i=1}^{2013} i^2 - 2\sum_{i=1}^{1006}(2i)^2 = \sum_{i=1}^{2013} i^2 - 8\sum_{i=1}^{1006} i^2$

13. Hitunglah $1^3+2^3+3^3+\cdots+2013^3$

Jawab :
Perhatikan
$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$
Sehingga $1^3+2^3+3^3+\cdots+2013^3 = \left(\frac{1}{2}(2013)(2014)\right)^2$

14. Hitunglah $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots + 2013^3$

Jawab :
$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots + 2013^3 = \sum_{i=1}^{2013} i^3 - 2\sum_{i=1}^{1006} (2i)^3 = \sum_{i=1}^{2013} i^3 - 16\sum_{i=1}^{1006} i^3$

15. Jika diketahui $\sum_{i=1}^{11}(4 + 2k_i) = 77$ dan $\sum_{i=1}^{7} k_i = 14$, maka nilai $\sum_{i=8}^{11}(4 + 2k_i)$

Jawab :
Diketahui $\sum_{i=1}^{11}(4 + 2k_i) = 77$ dan $\sum_{i=1}^{7} k_i = 14$, maka

$\sum_{i=1}^{11}(4 + 2k_i) = \sum_{i=1}^{11} 4 + \sum_{i=1}^{11} 2k_i = \sum_{i=1}^{11} 4 + 2\sum_{i=1}^{11} k_i = 4.11 + 2\sum_{i=1}^{11} k_i = 77$

$44 + 2\sum_{i=1}^{11} k_i = 77$

$2\sum_{i=1}^{11} k_i = 77 - 44 = 33$

$\sum_{i=1}^{11} k_i = \frac{33}{2}$

Sehingga

$\sum_{i=8}^{11}(4 + 2k_i) = \sum_{i=8}^{11} 4 + 2\sum_{i=8}^{11} k_i = 4(11 - 8 + 1) + 2(\sum_{i=1}^{11} k_i - \sum_{i=1}^{7} k_i)$

$\sum_{i=8}^{11}(4 + 2k_i) = 16 + 2\left(\frac{33}{2} - 14\right) = 16 + 33 - 28 = 21$

Jadi $\sum_{i=8}^{11}(4 + 2k_i) = 21$

16. Hitunglah $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{9900}$

Jawab :
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{9900} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0,99$

17. Tentukan jumlah dari
$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \cdots$

Jawab :
Misalkan
$S = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \cdots$

$\frac{1}{2}S = \quad \frac{1}{4} + \frac{4}{8} + \frac{9}{16} + \frac{16}{32} + \cdots$

______________________________ -

$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \cdots$

Selanjutnya

$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \cdots$ masing-masing ruas dikali $\frac{1}{2}$ lagi

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{7}{32} + \frac{9}{64} + \cdots$

_______________________________ -

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \frac{2}{32} + \cdots$

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots}_{Deret\ geometri\ dengan\ a=\frac{1}{2},\ r=\frac{1}{2}}$$

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$S = 6$

Jadi, $\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \cdots = 6$

18. Hitunglah

$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+2013}$

Jawab :

Alternatif 1:

$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+2013}$

$= \frac{2-1}{1} + \frac{3-2}{3} + \frac{4-3}{6} + \frac{5-4}{10} + \cdots + \frac{2014-2013}{2027091}$

$= \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{3}{3} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{4}{6} - \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{5}{10} - \frac{4}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{2014}{2027091} - \frac{2013}{2027091}\right)$

$= \left(\frac{2}{1} - 1\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{2014}{2027091} - \frac{2013}{2027091}\right)$

$= \frac{2}{1} - \frac{2013}{2027091}$

$= \frac{4054182-2013}{2027091} = \frac{\cancel{2013}.(2014-1)}{1007.\cancel{2013}} = \frac{2013}{1007}$

Alternatif 2:

Kita dapat juga menggunakan rumus

$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{2n}{n+1}$

Sehingga

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2013}=\frac{2.2013}{2013+1}=\frac{4026}{2014}=\frac{2013}{1007}$$

19. Hitunglah

$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{5^{2013}}$

Jawab :

Misal $A=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{5^{2013}}$

$\frac{1}{5}A=\quad\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{5^{2013}}+\frac{1}{5^{2014}}$

____ -

$\frac{4}{5}A=\frac{1}{5}-\frac{1}{5^{2014}}$

$A=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2^{2013}}\right)\right)$

$A=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{2013}}\right)$

Jadi $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{5^{2013}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{2013}}\right)$

20. Jika diketahui deret bilangan sebagai berikut

$2+3+6+12+22+\cdots$

Tentukan

a. Jumlah 2013 suku yang pertama (S_{2013})
b. Suku ke 2013 (U_{2013})

Jawab :

Pembahasan diserahkan kepada pembaca

21. (Soal Olimpiade Sains 2012 Matematika SMA/MA. PORSEMA NU VIII PW. LP. MA'ARIF NU JAWA TENGAH)

Jika $0{,}1525252\ldots.=\frac{p}{2q+r}$ dan $+q=3r$, harga p,q dan r adalah …

a. $151,\ \frac{2819}{7},\frac{1292}{7}$
b. $152,\ \frac{2821}{7},\frac{1292}{7}$
c. $153,\ \frac{2819}{7},\frac{1295}{7}$
d. $150,\ \frac{2821}{7},\frac{1292}{7}$
e. $152,\ \frac{2819}{7},\frac{1295}{7}$

Jawab :

Pembahasan diserahkan kepada pembaca

22. Hitunglah

$$\frac{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\ldots(2013^3+1)}{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\ldots(2013^3-1)}$$

Jawab :
Untuk menjawab soal di atas perhatikan bahwa

- $\begin{cases} x^3+1=(x+1)(x^2-x+1) \\ x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3+1}{x^3-1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$
- $x^2+x+1=(x+1)^2-(x+1)+1$, contoh $2^2+2+1=3^2-3+1$

Sehingga

$\frac{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\ldots(2013^3+1)}{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\ldots(2013^3-1)}$

$=\frac{(2+1)(3+1)(4+1)\ldots(2013+1)[(2^2-2+1)(3^2-3+1)(4^2-4+1)\ldots(2013^2-2013+1)]}{(2-1)(3-1)(4-1)\ldots(2013-1)[(2^3+2+1)(3^2+3+1)(4^2+4+1)\ldots(2013^2+2013+1)]}$

$=\frac{\cancel{3.4.5}\ldots2013.2014[(2^2-2+1)]}{1.2.\cancel{3}\ldots\cancel{2012}[(2013^2+2013+1)]}=\frac{3}{2}.\frac{2013.2014}{[(2013^2+2014)]}$

23. Nilai dari

$\frac{1}{1^4+1^2+1}+\frac{1}{2^4+2^2+1}+\frac{1}{3^4+3^2+1}+\cdots+\frac{1}{2013^4+2013^2+1}$

Jawab :
Perhatikan bahwa

$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)^2-x^2}=\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)$

Sehingga

$\frac{1}{1^4+1^2+1}+\frac{1}{2^4+2^2+1}+\frac{1}{3^4+3^2+1}+\cdots+\frac{1}{2013^4+2013^2+1}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2013^2-2013+1}-\frac{1}{2013^2+2013+1}\right)$

Perhatikan antar dua suku bersebelahan saling menghabiskan, sehingga

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2013^2+2013+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2013^2+2013}{2013^2+2013+1}\right)$

$=\frac{2027091}{4054183}$

24. hitunglah

$\frac{(61^4+324)(73^4+324)(85^4+324)(97^4+324)}{(55^4+324)(67^4+324)(79^4+324)(91^4+324)}$

Jawab :
Perhatikan pemfaktoran berikut
$(x)^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 = [x^2 + 2y^2]^2 - 2(x^2)(2y^2) = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$

$\Leftrightarrow (x)^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$

$\Leftrightarrow (x)^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + y^2 + y^2)(x^2 - 2xy + y^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow (x)^4 + 4y^4 = ((x - y)^2 + y^2)((x + y)^2 + y^2)$

Dari hasil pemfaktoran di atas maka diperoleh

- Untuk bentuk $61^4 + 324 \implies x^4 = 61^4 \Longrightarrow x = 61$
- Untuk bentuk $61^4 + 324 \implies 4y^4 = 324 \Longrightarrow y^4 = 81 \Longrightarrow y = 3$

Sehingga
$x^4 + 4y^4 = ((x - y)^2 + y^2)((x + y)^2 + y^2)$

$61^4 + 324 = ((61 - 3)^2 + 3^2)((61 + 3)^2 + 3^2) = (58^2 + 3^2)(64^2 + 3^2)$

Dengan cara yang kurang lebih sama akan didapatkan

$73^4 + 324 = 73^4 + 4.3^4 = (70^2 + 3^2)(76^2 + 3^2)$

$85^4 + 324 = 85^4 + 4.3^4 = (82^2 + 3^2)(88^2 + 3^2)$

dst

$\frac{(61^4+324)(73^4+324)(85^4+324)(97^4+324)}{(55^4+324)(67^4+324)(79^4+324)(91^4+324)}$

$= \frac{\cancel{(58^2+3^2)(64^2+3^2)(70^2+3^2)(76^2+3^2)(82^2+3^2)(88^2+3^2)(94^2+3^2)}(100^2+3^2)}{(52^2+3^2)\cancel{(58^2+3^2)(64^2+3^2)(70^2+3^2)(76^2+3^2)(82^2+3^2)(88^2+3^2)(94^2+3^2)}}$

$= \frac{100^2+3^2}{52^2+3^2} = \frac{10000+9}{2704+9} = \frac{10009}{2711}$

Jadi $\frac{(61^4+324)(73^4+324)(85^4+324)(97^4+324)}{(55^4+324)(67^4+324)(79^4+324)(91^4+324)} = \frac{10009}{2711}$

25. Jika $2^x = 3^y = 6^z$, nyatakan z dalam x dan y

Jawab :
Perhatikan
$2^x = 3^y = 6^z$, sehingga dari persamaan ini kita mendapatkan

- $2^x = 3^y \Longrightarrow 2 = 3^{\frac{y}{x}}$ atau $3 = 2^{\frac{x}{y}}$ ....1)
- $3^y = 6^z \Longrightarrow 3^y = (2.3)^z \Longrightarrow 3^y = 2^z.3^z$..................2)

Dari persamaan 1) dan 2) kita mendapatkan

$3^y = 2^z . 3^z \Longrightarrow 3^y = \left(3^{\frac{y}{x}}\right)^z . 3^z$

$3^y = 3^{\frac{yz}{x}} . 3^z \Longrightarrow 3^y = 3^{\left(\frac{yz}{x}+z\right)}$

Sehingga
$y = \frac{yz}{x} + z \Longrightarrow y = \frac{yz+xz}{x} \Longrightarrow xy = z(x+y) \Longrightarrow = \frac{xy}{x+y}$, di sini $x, y \neq 0$

26. Jika $3^a = 4, 4^b = 5, 5^c = 6, 6^d = 7, 7^e = 8, \text{dan } 8^f = 9$, tentukan nilai $abcdef$

Jawab :
perhatikan untuk
$8^f = 9 \Longrightarrow (7^e)^f = 9 \Longrightarrow ((6^d)^e)^f = 9 \Longrightarrow (((5^c)^d)^e)^f = 9 \Longrightarrow ((((4^b)^c)^d)^e)^f = 9 \Longrightarrow$

$(((((3^a)^b)^c)^d)^e)^f = 9 \Longrightarrow 3^{abcdef} = 9 \Longrightarrow 3^{abcdef} = 3^2 \Longrightarrow abcdef = 2$

jadi nilai $abcdef$ adalah 2

27. jika diketahui $xy = 2$ dan $x^2 + y^2 = 5$, maka nilai $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$?

Jawab :
$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{5}{2}$

28. Jika diketahui $\frac{3x+4y}{2x-2y} = 5$, maka tentukan harga untuk $\frac{x^2+2y^2}{xy}$

Jawab :
Pada soal diketahui $3x + 4b = 5(2x - 2y)$
$\Leftrightarrow 3x + 4y = 10x - 10y$

$\Leftrightarrow 3x - 10x = -10y - 4y$

$\Leftrightarrow -7x = -14y$

$\Leftrightarrow x = 2y$

Sehingga $\frac{x^2+2y^2}{xy} = \frac{(2y)^2+2y^2}{(2y)y} = \frac{4y^2+2y^2}{2y^2} = \frac{6y^2}{2y^2} = 3$

29. Diketahui $2^x + 2^{-x} = 3$, maka nilai dari $8^x + 8^{-x}$ adalah....

Jawab :
Diketahui $2^x + 2^{-x} = 3$.

Perhatikan bahwa $8^x + 8^{-x} = (2^3)^x + (2^3)^{-x} = (2^x)^3 + (2^{-x})^3 = (2^x + 2^{-x})((2^x)^2 - 2^x.2^{-x} + (2^{-x})^2) = (3)((2^x)^2 + (2^{-x})^2 - 1) = (3)((2^x + 2^{-x})^2 - 2 - 1) = (3)(3^2 - 3) = (3)(6) = 18$

Jadi, nilai dari $8^x + 8^{-x} = 18$

30. (OSP 2006)
Himpunan penyelesaian untuk x yang memenuhi $(x-1)^3 + (x-2)^2 = 1$ adalah

Jawab :

Alternatif 1

$(x-1)^3 + (x-2)^2 = 1$

$(x-1)^3 + (x-2)^2 - 1 = 0$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^2 - 4x + 4 - 1 = 0$

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

Perhatikan bagian konstan berupa bilangan 2, yang memiliki faktor $\pm 1, \pm 2$
Misalkan $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

- Untuk $x = 1 \Longrightarrow f(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$ (1 adalah faktor $f(x)$)
- Untuk $x = -1 \Longrightarrow f(-1) = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$ (-1 adalah faktor $f(x)$)
- Untuk $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 8 - 8 - 2 + 2 = 0$ (2 adalah faktor $f(x)$)
- Untuk $x = -2 \Longrightarrow f(-2) = -8 - 8 + 2 + 2 = -12$ (-2 bukan faktor $f(x)$)

Alternatif 2

$(x-1)^3 + (x-2)^2 = 1$

$(x-1)^3 + (x-2)^2 - 1 = 0$

$(x-1)^3 + (x-2+1)(x-2-1) = 0$

$(x-1)^3 + (x-1)(x-3) = 0$

$(x-1)^2(x-1) + (x-3)(x-1) = 0$

$(x-1)\left((x-1)^2 + (x-3)\right) = 0$

$(x-1)(x^2 - 2x + 1 + x - 3) = 0$

$(x-1)(x^2 - x - 2) = 0$

$(x-1)(x+1)(x-2) = 0$

Jelas penyelesaiannya adalah $x = 1, x = -1, \text{dan } x = 2$

Jadi Himpunan Penyelesaiannya adalah $\{-1,1,2\}$

31. (Canadian MO 1992)
Harga x real yang memenuhi $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$

Jawab :
Misalkan $z = x + 1 \Longrightarrow x = z - 1$, dengan $z \neq 0$

$(z-1)^2 + \frac{(z-1)^2}{z^2} = 3$

$(z-1)^2 + \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 = 3$

$(z-1)^2 + \left(1 - \frac{1}{z}\right)^2 = 3$

$z^2 - 2z + 1 + 1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} - 3 = 0$

$z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 3 = 0$

$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 3 = 0$

$\left(z + \frac{1}{z} - 3\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) = 0$

$z + \frac{1}{z} - 3 = 0$ atau $z + \frac{1}{z} + 1 = 0$

Sehingga

1) $z + \frac{1}{z} - 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 1 = 0$, dengan rumus ABC diperoleh $z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

2) $z + \frac{1}{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$, dengan rumus diperoleh $z_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

Ambil $z_{1,2}$ sehingga harga x adalah

$x = z - 1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{3 - 2 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Jadi penyelesaian dari persamaan di atas adalah $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

32. (AIME 1983)
Jika w dan z adalah bilangan kompleks yang memenuhi persamaan
$w^2 + z^2 = 7$ dan

$w^3 + z^3 = 10$

Nilai maksimum untuk $w + z$ adalah

Jawab :

33. Bentuk sederhana dari $\frac{2^{2011}+2^{2012}+2^{2013}}{7}$?

Jawab :

$$\frac{2^{2011}+2^{2012}+2^{2013}}{7} = \frac{2^{2011}+2^{2011}.2^{1}+2^{2011}.2^{2}}{7} = \frac{2^{2011}+2.2^{2011}+4.2^{2011}}{7}$$

$$= \frac{(1+2+4).2^{2011}}{7} = 2^{2011}$$

34. Tentukan nilai dari

$$\frac{2^{2013}+2^{2011}}{2^{2011}-2^{2009}}$$

Jawab :

$$\frac{2^{2009+4}+2^{2009+2}}{2^{2009+2}-2^{2009}} = \frac{2^{4}.2^{2009}+2^{2}.2^{2009}}{2^{2}.2^{2009}-2^{2009}} = \frac{16.2^{2009}+4.2^{2009}}{4.2^{2009}-2^{2009}} = \frac{20.2^{2009}}{3.2^{2009}} = \frac{20}{3}$$

Jadi,

$$\frac{2^{2013}+2^{2011}}{2^{2011}-2^{2009}} = \frac{20}{3}$$

35. (OMITS 2012)

Diketahui $x = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

Tentukan nilai untuk

$x^{2012}+2x^{2011}-5x^{2010}-10x^{2009}+x^{2008}+2x^{2007}+2012x^{5}+3x^{4}-10060x^{3}-15x^{2}+2012x+2012$ adalah ...

Jawab :

Alternatif 1:

Diketahui

$$x = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+\sqrt{25}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{35})+(\sqrt{21}+\sqrt{25})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$$

Sehingga

$$\frac{1}{x} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5}) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$$

dan $x = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3}) \Longrightarrow x^{2} = \frac{1}{2}(5+\sqrt{21})$

Perhatikan soal di atas, kita tulis ulang

$x^{2012} + 2x^{2011} - 5x^{2010} - 10x^{2009} + x^{2008} + 2x^{2007} + 2012x^5 + 3x^4 - 10060x^3 - 15x^2 + 2012x + 2012$

$= (x+1)x^{2011} - 5(x+2)x^{2009} + (x+2)x^{2007} + 2012(x^2-5)x^3 + 3(x^2-5)x^2 + 2012(x+1)$

$= (x+2)(x^4 - 5x^2 + 1)x^{2007} + (x^2-5)x^2(2012x+3) + 2012(x+1)$

$= (x+2)\left((x^2-5)x^2+1\right)x^{2007} + (x^2-5)x^2(2012x+3) + 2012(x+1)$

Selanjutnya kita cari faktor untuk $x^4 - 5x + 1$ dengan rumus ABC, maka kita akan mendapatkan $x_{1,2}^2 = \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

Dari yang diketahui di atas maka untuk

- $x^4 - 5x^2 + 1 = (x^2-5)x^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}(5+\sqrt{21}) - 5\right)\left(\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})\right) + 1 = \left(\frac{1}{2}(-5+\sqrt{21})\right)\left(\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})\right) + 1 = -1 + 1 = 0$
- $(x^2-5)x^2 = -1$, lihat pembahasan sebelumya

Sehingga Persamaan/soal di atas dapat disederhanakan menjadi

$x^{2012} + 2x^{2011} - 5x^{2010} - 10x^{2009} + x^{2008} + 2x^{2007} + 2012x^5 + 3x^4 - 10060x^3 - 15x^2 + 2012x + 2012 = 0 - (2012x+3) + 2012x + 2012 = -3 + 2012 = 2009$

Jadi , $x^{2012} + 2x^{2011} - 5x^{2010} - 10x^{2009} + x^{2008} + 2x^{2007} + 2012x^5 + 3x^4 - 10060x^3 - 15x^2 + 2012x + 2012 = 2009$

Alternatif 2:

Diketahui $= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$, misalkan $a = \sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$

Untuk $a^2 = \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2 = 3+5+7+2\left(\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}\right) = 15 + \left(\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}\right) \Rightarrow \left(\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}\right) = \frac{a^2-15}{2}$

Sehingga

$x = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{\left(\frac{a^2-15}{2}\right)+5}{a+\sqrt{5}} = \frac{a^2-5}{2(a+\sqrt{5})} = \frac{(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})}{2(a-\sqrt{5})} = \frac{a-\sqrt{5}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$

Langkah berikutnya sama seperti pada alternatif 1.

36. (AIME 1986)
Carilah nilai dari $\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)$

Jawab :
$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$

$=\left((\sqrt{5}+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2\right)\left(\sqrt{7}+(\sqrt{5}-\sqrt{6})\right)\left(\sqrt{7}-(\sqrt{5}-\sqrt{6})\right)$

$=(5+6+2\sqrt{30}-7)\left(7-(5+6-2\sqrt{30})\right)$

$=(4+2\sqrt{30})(-4+2\sqrt{30})$

$=-16+4.30=104$

Jadi $(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})=104$

37. Bila $x+y+3\sqrt{x+y}=18$ dan $x-y-2\sqrt{x-y}=15$, maka harga xy

Jawab :
Misalkan
$p=x+y$ dan

$q=x-y$

Maka persamaan pada soal di atas dapat dituliskan kembali menjadi
$(\sqrt{p})^2+3\sqrt{p}-18=0 \Longrightarrow (\sqrt{p}+6)(\sqrt{p}-3)=0 \Longrightarrow p=9$

$(\sqrt{q})^2-2\sqrt{q}-15=0 \Longrightarrow (\sqrt{q}+3)(\sqrt{q}-5)=0 \Longrightarrow q=25$

Sehingga

$p=x+y=9$

$q=x-y=5$

Dengan eliminasi $x=17$, $y=-8$

Jadi, $xy=17.(-8)=-136$

38. Jika $x=(3-\sqrt{5})\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)+(3+\sqrt{5})\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$, maka nilai x adalah

Jawab :
Misalkan

$p=3-\sqrt{5}$ dan $q=3+\sqrt{5}$

Maka

$x=p\sqrt{q}+q\sqrt{p}$

$x = \sqrt{p^2q} + \sqrt{pq^2}$

$x = \sqrt{pq}(\sqrt{p} + \sqrt{q})$

Dan $pq = (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4 \implies \sqrt{pq} = \sqrt{4} = 2$

Sehingga

$x = 2\left(\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)$

$x = \sqrt{2}.\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)\right)$

$x = \sqrt{2}\left(\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}\right)$

$x = \sqrt{2}\left(\sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5} + 1\right)^2}\right)$

$x = \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} + 1)$

$x = \sqrt{2}(2\sqrt{5})$

$x = 2\sqrt{10}$

Jadi, $x = (3 - \sqrt{5})\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}}\right) + (3 + \sqrt{5})\left(\sqrt{3 - \sqrt{5}}\right) = 2\sqrt{10}$

39. Jika diketahui untuk $\sqrt{14x^2 - 20x + 48} + \sqrt{14x^2 - 20x - 15} = 9$, maka nilai dari $\sqrt{14x^2 - 20x + 48} - \sqrt{14x^2 - 20x - 15}$ adalah

Jawab :
Misalkan

$p = 14x^2 - 20x + 48$

$q = 14x^2 - 20x - 15$

maka,

$\sqrt{p} + \sqrt{q} = 9$

$\sqrt{p} = 9 - \sqrt{q}$ (masing-masing ruas dikuadratkan)

$p = 81 - 18\sqrt{q} + q$

$14x^2 - 20x + 48 = 81 - 18\sqrt{q} + 14x^2 - 20x - 15$

$48 = 66 - 18\sqrt{q}$

$18\sqrt{q} = 66 - 48 = 18$

$\sqrt{q} = 1$

Sehingga kita dapatkan nilai $\sqrt{p} = 8$.

Jadi, $\sqrt{14x^2 - 20x + 48} - \sqrt{14x^2 - 20x - 15} = 8 - 1 = 7$

40. Hitunglah nilai untuk $\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \cdots}}}}$

Jawab :
Misalkan bahwa

$\sqrt{1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + (x+3)\sqrt{...}}}}}} = x$, dengan $x > 0$

Akan kita tunjukkan dengan bukti sebagai berikut :

$x^2 = 1 + (x^2 - 1)$

$x^2 = 1 + (x-1)(x+1)$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{(x+1)^2}$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + ((x+1)^2 - 1)}$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + (x+1-1)(x+1+1)}$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + x(x+2)}$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{(x+2)^2}}$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{1 + ((x+2)^2 - 1)}}$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{...}}}}$

$x = \sqrt{1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{...}}}}}$

Akibatnya : $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{...}}}}}} = 2+1 = 3$

41. (**Philippine Mathematical Olympiad 2009**)
Sederhanakanlah

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\ \dots\ +\sqrt{10+\sqrt{98}}+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\ \dots\ +\sqrt{10-\sqrt{98}}+\sqrt{10-\sqrt{99}}}$$

Jawab :
Pada bentuk penjumlahan suku dari pecahan di atas dapat di tuliskan menjadi

$$\frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10+\sqrt{x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}}$$

Karena $\sqrt{10+\sqrt{x}} > \sqrt{10-\sqrt{x}}$

Selanjutnya dapat kita tuliskan menjadi $\sqrt{10-\sqrt{x}} + y = \sqrt{10+\sqrt{x}}$

Penyelesaian untuk y adalah: $y = \sqrt{10+\sqrt{x}} - \sqrt{10-\sqrt{x}}$

$$y = \sqrt{\left\{\sqrt{10+\sqrt{x}} > \sqrt{10-\sqrt{x}}\right\}^2}$$

$$y = \sqrt{20-2\sqrt{100-x}}$$

Kembali pada persamaan mula-mula, kita mempunyai

$$\frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10+\sqrt{x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}} = \frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}} + y}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}} = \frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}+\sqrt{20-2\sqrt{100-x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}}$$

$$= 1 + \frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{20-2\sqrt{100-x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}}$$

$$= 1 + \sqrt{2}\left\{\frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{100-x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}}\right\}$$

Sekarang, faktor dari $\frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{100-x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}}$ adalah sama dengan 1, karena

$\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{100-x}} =$

$\sqrt{10-\sqrt{100-1}}+\sqrt{10-\sqrt{100-2}}+\ \dots\ +\sqrt{10-\sqrt{100-99}}$

$$= \sqrt{10-\sqrt{99}} + \sqrt{10-\sqrt{98}} + \ \dots + \sqrt{10-\sqrt{1}} = \sum_{x=1}^{99} \sqrt{10-\sqrt{x}}$$

Sehingga

$$\frac{\sum_{x=1}^{99} \sqrt{10+\sqrt{x}}}{\sum_{x=1}^{99} \sqrt{10-\sqrt{x}}} = 1 + \sqrt{2}$$

42. (OMITS 2012)
Nilai maksimum untuk perbandingan antara bilangan empat digit *abcd* dan jumlah digit-digitnya adalah…

Jawab :
abcd/(a + b + c + d) supaya maksimum maka a + b + c + d harus sekecil-kecilnya, 0 tidak mungkin,
Sehingga yang mungkin a = 1, b = c = d =0, atau a + b + c + d = 0, maka hasinya adalah
1000/1 = 1000
Jadi nilai maksimumnya adalah 1000

43. (OMITS 2012)
Bila diketahui
$n! =$
$2^{73}.3^{34}.5^{21}.7^{11}.11^{6}.13^{5}.17^{4}.19^{4}.23^{3}.29^{2}.31^{2}.37^{2}.41.43.47.53.59.61.67.71.73$
maka nilai *n* berikut yang memenuhi adalah… .
a. 74 b. 75. c. 76. d. 77. e. 78

Jawab :
Untuk menjawab soal di atas, coba kita perhatikan

- Bilangan 73 hanya digunakan sekali, sehingga kemungkinan n ≥ 73
- Bilangan 19 digunakan sebanyak 4 kali, misalkan saja. 19 x 4 = 76, sehingga kemungkinan juga n ≥ 76
- Bilangan 11 digunakan 6 kali, sehingga 11 x 6 = 66, dan akibatnya bilangan 77 tidak akan muncul, maka n < 77 atau 76 ≤ n < 77
- Perhatikan bilangan 5 digunakan pada soal sebanyak 21 kali, padahal penggunaan bilangan 5 jika dirinci sebagai berikut;

1. 5 (1 kali), 15 (1 kali), 25=5x5 (2 kali), 35 (1 kali), 45 (1 kali), 55=5x11 (1 kali), 65 (1 kali), 75=5x5x5x3 (2 kali, berdasarkan poin ke-3)
2. 10 (1 kali), 20 (1 kali), 30 (1 kali), 40 (1 kali), 50=5x5x2 (2 kali), 60 (1 kali) 70 (1 kali)

hanya tertulis 18 kali.

Sehingga pilihan jawaban dari a sampai e tidak ada yang memenuhi

44. Jika $n! = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2).\,.\,.\,3\,.\,2\,.\,1,$ tentukan nilai n sehingga $n! =$ $2^{15}\,.\,3^{6}\,.\,5^{3}\,.\,7^{2}\,.\,11\,.\,13$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

45. (OMITS 2012)
Jika, *a, b, c, d*, dan *e* mewakili digit-digit pada suatu bilangan yang dituliskan dalam basis tertentu. Maka banyaknya solusi (*a, b, c, d, e*) jika $(abcd)_7 = (2012)_e$ adalah… .
a. 0 b. 1 c. 2 d. 3 e. 4

catatan :
$(abcd)_7$ adalah bilangan 4 digit *abcd* dalam basis 7

Jawab :
Perlu diketahui bahwa dari soal baik a, b, c, d, e tidak disyaratkan harus berbeda dan basis bilangan itu tertinggi adalah 10.
Sebelah kiri tanda sama dengan,
Jika $(abcd)_7$ ingin diubah ke dalam basis 10, maka
$(abcd)_7$ = a.(7^3) + b.(7^2) + c.(7^1) + d.(7^0) = 343.a + 49.b + 7.c + d
Karena *a, b, c,* dan *d* adalah bilangan dalam basis 7, maka akan berakibat bahwa;
* untuk nilai *a*, berlaku : 1≤ *a* ≤ 6
* untuk nilai *b*, *c*, dan *d* berlaku 0≤ *a* ≤ 6

Sebelah kanan tanda sama dengan,
dengan langkah yang sama, misalkan kita ubah ke dalam basis 10, maka
$(2012)_e$ = 2.(e^3) + 0.(e^2) + 1.(e^1) + 2.(e^0) = 2.(e^3) + e + 2.

Sehingga

1. jika $(2012)_e$ kita jadikan dalam basis 10 maka $(2012)_e$ = 2012 dan $(abcd)_7$ bilangan dalam basis 7, maka
nilai a = 2012/343 = 5,… , dari sini kita pilih a = 5 dan 5 x 343 = 1715, serta 2012 – 1715 = 297.
Kemudian 297 sebagai sisa dibagi 49, maka 297/49 = 6,… ,dari sini pilih b = 6 dan 49 x 6 = 294, serta 297 – 294 = 3. Langkah berikutnya 3 sebagai sisa tidak dapat dibagi 7, sehingga 3 secara otomatis menjadi bilangan satuan, dan pada akhirnya didapat $(2012)_{10}$ = $(5603)_7$

Sehingga untuk langkah ini diperoleh pasangan (*a,b,c,d,e*) = (5,6,0,3,10)

2. Dengan langkah yang kurang lebih sama, kita pilih secara berurutan *e* dengan harga; 9, 8, 7, 6, tetapi *e* tidak diperkenankan berharga 5 karena saat *e* = 5, $(2012)_5$ = 2.125 + 0.25 + 1.5 + 2 = 257 < 343 ≤ a (a tidak boleh berharga nol)
Sehingga total ada 5 pasangan (*a,b,c,d,e*), yaitu

- (5,6,0,3,10)
- (4,1,6,6,9)
- (2,2,0,5,8)
- (2,0,1,2,7)
- (1,1,6,6,6)

Sehingga menurut saya baik jawaban tidak terdapat pada pilihan *a, b, c, d*, dan *e*

Silahkan anda cek sendiri apa dalam perhitungan saya ada yang ketinggalan, terima kasih atas segala atensinya untuk pembaca yang budiman, apa bila dalam tulisan ini terdapat kekeliruan maka saya akan dengan senang hati untuk membetulkannya

46. (OMITS 2012)
Jika pada persegi ajaib jumlah angka setiap baris, setiap kolom dan setiap diagonal sama dan untuk persegi ajaib ukuran 4 x 4 jumlah angka setiap baris adalah 34, tentukan jumlah angka setiap baris pada persegi ajaib 12 x 12 ?
(Catatan : persegi ajaib *n x n* hanya terisi angka – angka dari 1 sampai n^2)

Jawab :
Jika persegi ajaib ukuran 4 x 4 jumlah angka setiap barisnya 34, maka kalau untuk 12 x 12 = ….
Gunakan rumus untuk persegi ajaib yang angka penyusunnya dari 1 sampai n^2 = *1/2. n.(n^2 + 1)*
Sehingga untuk ukuran 12 x 12 jumlah angka setiap barisnya = $\frac{1}{2}$. 12 . (12^2 + 1) = 6 . (144 + 1) = 870

47. Jika $3\sqrt{27^{2x-1}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{243}}\right)^{3x}$, maka x adalah

Jawab :

$$3\sqrt{27^{2x-1}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{243}}\right)^{3x}$$

$$3.\,27^{\frac{2x-1}{2}} = \left(\left(\frac{1}{243}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{3x}$$

$3.(3^3)^{\frac{2x-1}{2}} = \left(\frac{1}{243}\right)^x$

$3.3^{\frac{6x-3}{2}} = (3^{-5})^x$

$3^{1+\frac{6x-3}{2}} = 3^{-5x} \quad \Longrightarrow a^{f(x)} = a^{g(x)} \Longrightarrow f(x) = g(x)$

$1 + \frac{6x-3}{2} = -5x$

$2 + 6x - 3 = -10x$

$16x = 1$

$x = \frac{1}{16}$

Jadi $x = \frac{1}{16}$

48. Jika $5^{3x} = 8$, maka nilai 5^{x+3}

    Jawab :
    $5^{3x} = 8 \Longrightarrow (5^x)^3 = 2^3 \Longrightarrow 5^x = 2$

    Sehingga $5^{x+3} = 5^x.5^3 = 2.125 = 250$

49. Jumlah untuk akar-akar dari persamaan $5^{x+1} + 5^{6-x} = 11$ adalah

    Jawab :
    Perhatikan bahwa $5^{x+1} + 5^{6-x} = 11$
    $5^x.5^1 + 5^6.5^{-x} = 11$

    $5.5^x + \frac{5^6}{5^x} - 11 = 0$ (masing-masing ruas dikalikan 5^x)

    $5.5^{2x} - 11.5^x + 5^6 = 0$ (persamaan kuadrat dalam 5^x)

    Untuk jumlah akar-akar diperoleh saat perkalian 2 akar, yaitu

    $5^{x_1}.5^{x_2} = \frac{c}{a} = \frac{5^6}{5} = 5^5$

    Sehingga

    $5^{x_1+x_2} = 5^5$

    Jadi jumlah akar-akarnya adalah $x_1 + x_2 = 5$

50. Himpunan penyelesaian untuk $5^{8-2x} + 49.5^{3-x} - 2 = 0$ adalah

    Jawab :
    Pembahasan diserahkan kepada pembaca

51. Jika $3^{x^2-3x+2}+3^{x^2-3x}=10$ dengan $x_1 \text{dan } x_2$ adalah penyelesaian maka $3^{x_1+x_2}$ adalah

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

52. Jika $54(6^x)+3^x=6(18^x)+9$ mempunyai penyelesaian $x_1 \text{dan } x_2$, maka $(x_1.x_2)^2$ adalah

Jawab :

$54(6^x)+3^x=6(18^x)+9$

$54(6^x)+3^x-6(18^x)-9=0$

$(6.6^x-1)(9-3^x)=0$

$6^{1+x}-1=0$ atau $9-3^x=0$

$6^{x+1}=1$ atau $3^x=9$

$6^{x+1}=6^0$ atau $3^x=3^2$

Sehingga $x=-1$ atau $x=2$

Jadi $(-1.2)^2=(-2)^2=4$

53. (OMITS 2012)

$$\begin{cases}(1+4^{2x-y})5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1}\\ y^3+4x+1+\log(y^2+2x)=0\end{cases}$$

Penyelesaian dari persamaan di atas adalah… .
Jawab :

Kita tulis ulang soal di atas, yaitu ;

$$\begin{cases}(1+4^{2x-y})5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.1)\\ y^3+4x+1+\log(y^2+2x)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.2)\end{cases}$$

Dari persamaan pertama
$(1+4^{2x-y})5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1}$, akan kita peroleh

$\left(1+\frac{4^{2x}}{4^y}\right)\frac{5.5^y}{5^{2x}}=1+\frac{2.2^{2x}}{2^y}$

$\left(1+\frac{4^{2x}}{4^y}\right)\frac{5.5^y}{5^{2x}}-\frac{2.2^{2x}}{2^y}=1$

$\left(\frac{4^y+4^{2x}}{4^y}\right)\frac{5.5^y}{5^{2x}}-\frac{2.2^{2x}}{2^y}=1$

$\frac{5.4^y.5^y+5.4^{2x}.5^y-2^y.5^{2x}.2.2^{2x}}{4^y.5^{2x}} = 1$

$\frac{5.5^y.2^{2y}+5.2^{4x}.5^y-2.2^y.2^{2x}.5^{2x}}{2^{2y}.5^{2x}} = 1$

$5.5^y.2^{2y} + 5.2^{4x}.5^y - 2.2^y.2^{2x}.5^{2x} = 2^{2y}.5^{2x}$

$5.5^y.2^{2y} + 5.2^{4x}.5^y = 2.2^y.2^{2x}.5^{2x} + 2^{2y}.5^{2x}$

$5^{y+1}(2^{2y} + 2^{4x}) = 5^{2x}(2^{2y} + 2^{2x+y+1})$, sampai dengan langkah di sini kita

mendapatkan

$y + 1 = 2x$ atau $y = 2x - 1$ .... 3)
Selanjutnya dari persamaan 3) kita substitusikan ke persamaan 2), sehingga
Untuk persamaan 2)
$y^3 + 4x + 1 + \log(y^2 + 2x) = 0$

$y^3 + 2.2x + 1 + \log(y^2 + y + 1) = 0$

$y^3 + 2.(y + 1) + 1 + \log(y^2 + y + 1) = 0$

$y^3 + 2y + 3 + \log(y^2 + y + 1) = 0$

$\log(y^2 + y + 1) = -(y^3 + 2y + 3)$

$-\log(y^2 + y + 1) = (y^3 + 2y + 3)$

$\log(y^2 + y + 1)^{-1} = y^3 + 2y + 3$

$\log\frac{1}{(y^2+y+1)} = y^3 + 2y + 3$

$\frac{1}{(y^2+y+1)} = 10^{(y^3+2y+3)}$,kalau kita ubah dalam variabel *x*, karena $y = 2x - 1$ maka

$\frac{1}{(4x^2-2x+1)} = 10^{8x^3-12x^2+10x}$

$\frac{1}{(4x^2-2x+1)} = 10^{x(8x^2-12x+10)}$

Sampai langkah di sini, ambil $x = 0$, maka

$\frac{1}{0-0+1} = 10^0 \Leftrightarrow 1 = 1$, memenuhi, sehingga jika $x = 0$ didapat $y = -1$

Untuk yang lain tidak ada yang memenuhi
Jadi, nilai x dan y yang memenuhi adalah, $x = 0$ dan $y = -1$

54. (OMITS 2012)
Sisa pembagian untuk suku banyak *f(x) = (x – a)(x – b)* adalah …

Jawab :
Rumus untuk sisa pembagian
S(x) = *px + q*
dengan

$$p = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$
$$q = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{a - b}$$

Atau

$$S(x) = \frac{(x - b)f(a)}{a - b} + \frac{(x - a)f(b)}{b - a}$$

55. (OMITS 2012)
Misalkan $P(x)$ dengan koefisien rasional sehingga memenuhi
$P\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) = 3 + \sqrt[3]{3}$ adalah polinomial berderejat …

a. tidak ada yang memenuhi
b. 1
c. 2
d. 3
e. 2 dan 3

Jawab :
Untuk jawaban soal di atas, perlu kita perhatikan bahwa
Andaikan

$P(x) = a(x - b) + c$ ....(untuk x berderajat 1)

$P(x) = a(x - b)(x - c) + d$ ....(untuk x berderajat 2)

$P(x) = a(x - b)(x - c)(x - d) + e$ ....(untuk x berderajat 3)

- Untuk x berderajat 1

  $P(x) \Longrightarrow P\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) = a\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} - b\right) + c = a\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) - ab + c = 3 + \sqrt[3]{3}$

  Supaya menghasilkan bilangan disebelah kiri jelas tidak mungkin baik a dan $(-ab + c)$ rasional(bukan bentuk akar)

- Untuk x berderajat 2

  $P(x) \Longrightarrow P\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) = a\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} - b\right)(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} - c) + d = 3 + \sqrt[3]{3}$

  $P\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) = a\left(\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right)^2 - (b + c)\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) + bc\right) + d = 3 + \sqrt[3]{3}$

  $P\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) = a\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{27}\right) - a(b + c)\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) + (abc) + d = 3 + \sqrt[3]{3}$

  $P\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) = a\left(6 + 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) - a(b + c)\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) + abc + d = 3 + \sqrt[3]{3}$

Misalkan ,m =-a(b+c) dan n = abc+d , maka dapat disederhanakan menjadi

$P(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = a(6+3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) + m(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) + n = 3+\sqrt[3]{3}$

Jelas juga koefisien baik a , m , dan n semuanya rasional

- Untuk x berderajat 3

$P(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = a\left((\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) - b\right)\left((\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) - c\right)\left((\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) - d\right) + e$

$P(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = a(12+9\sqrt[3]{3}+9\sqrt[3]{9}) - a(b+c+b)(6+3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) + a(b+c+bc)(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) - abcd + e = 3+\sqrt[3]{3}$

Misalkan h = - a(b+c+d) , j = a(b+c+bc), dan k = -abcd+e, sehingga persamaan di atas dapat dituliskan kembali seperti

$P(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = a(12+9\sqrt[3]{3}+9\sqrt[3]{9}) + h(6+3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) + j(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) + k$
$= 3+\sqrt[3]{3}$

Ternyata hasil akhir belum dapat menunjukkan bahwa koefisien *a , h , j ,* dan *k* rasional

Jadi, jawaban untuk soal dia atas adalah a. yaitu tidak ada yang memenuhi

56. Jika diketahui $2+\sqrt{3}$ adalah salah satu dari penyelesaian dari persamaan

$$x^4 - 14x^3 + 5x^2 - 62x + 13 = 0.$$

Carilah tiga akar yang lain ?

Jawab :

Perhatikanlah salah satu akar yang sudah diketahui adalah berupa bilangan irasional(bilangan bentuk akar), maka salah satu akar yang lainpun juga akan berupa bilangan irasional pula karena seluruh koefisien persamaan di atas berupa bilangan bulat. Dari sini kita bisa menebak salah satu akar yang lain tadi adalah sebuah bilangan irasional sekaligus sekawan (konjugasi) dari $2+\sqrt{3}$ yaitu $2-\sqrt{3}$.

Misalkan $x = 2+\sqrt{3}$ selanjutnya kita namakan x_1 dan $x = 2-\sqrt{3}$ kita tetapkan sebagai x_2. Untuk $\left(x-(2+\sqrt{3})\right) = 0$ dan $\left(x-(2-\sqrt{3})\right) = 0$ akan didapatkan $\left(x-(2+\sqrt{3})\right)\left(x-(2-\sqrt{3})\right) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$. Langkah berikutnya kita tinggal mengarahkan jawaban kita ke persamaan $x^4 - 14x^3 + 54x^2 - 62x + 13 = 0$.

Bagian konstan persamaan tersebut adalah 13, maka

$x^4 - 14x^3 + 54x^2 - 62x + 13 = (x^2 - 4x + 1)(x^2 - ax + 13)$

$x^4 - 14x^3 + 54x^2 - 62x + 13 = x^4 - (a + 4)x^3 + (4a + 14)x^2 - (52 + a)x + 13$

Dari persamaan di atas didapatkan $14 = a + 4 \Rightarrow a = 10$, selanjutnya nilai a kita substitusikan ke $x^2 - ax + 13$ menjadi $x^2 - 10x + 13$.

Untuk $x^2 - 10x + 13$ kita dapatkan $x_{3,4} = 5 \pm 2\sqrt{3}$ dengan rumus abc.

Jadi, tiga akar yang lain adalah $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, $x_3 = 5 + 2\sqrt{3}$ dan $x_4 = 5 - 2\sqrt{3}$.

57. (OSP 2007)
Carilah semua solusi real untuk x dari $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

Jawab :
Melihat persaman polinom berderajat 4 di atas tentunya kita akan melihat bilangan konstan 1, karena koefisien x^4 adalah 1 kita coba masukkan harga ± 1 misalkan $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

- $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 4 + 5 - 4 + 1 = -1$
- $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 1 + 4 + 5 + 4 + 1 = 15$

Karena ± 1 bukan faktor dari $f(x)$, maka kita gunakan cara coba-coba saja

Andaikan

$(x^2 - ax + 1)(x^2 - bx + 1) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$

$x^4 - bx^3 + x^2 - ax^3 + abx^2 - ax + x^2 - bx + 1 = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$

$x^4 - (a + b)x^3 + (2 + ab)x^2 - (a + b)x + 1 = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$

Dari kesamaan di atas kita mendapatkan

- $a + b = 4 \;\Rightarrow\; b = 4 - a$ atau sebaliknya ....1)
- $2 + ab = 5 \Rightarrow ab = 3$ ....2)

Dari persamaan 1) dan 2) kita mendapatkan

$ab = 3 \Rightarrow a(4 - a) = 3 \Rightarrow 4a - a^2 = 3 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow (a - 3)(a - 1) = 0$

$\Rightarrow a = 3 \text{ atau } a = 1$

- Untuk $a = 1 \Rightarrow b = 3$ demikian pula sebaliknya

Sehingga $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 1x + 1)(x^2 - 3x + 1)$

- Untuk $x^2 - 1x + 1 = 0$, memiliki akar $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ (akar-akar imajiner)

- Untuk $x^2 - 3x + 1 = 0$,memiliki akar $x_{3,4} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (akar-akar real)

Jadi akar real dari $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ adalah $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ dan $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

58. (OMITS 2012)
Diketahui $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$ adalah akar-akar untuk persamaan

$w^8 + \frac{1}{1-\sqrt[4]{5}} + \frac{1}{1+\sqrt[4]{5}} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = 0$

Jika jumlah dari akar-akar persamaan tersebut adalah v, maka nilai dari v^2 adalah …

Jawab :
Karena yang ditanyakan adalah jumlah akar – akar dari persamaan di atas dan jumlah dari akar – akar persamaan tersebut adalah
$v = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7 + w_8 = -\frac{Koefisien\, w^7}{Koefisien\, w^8} = -\frac{0}{1} = 0$

[Perhatikan bahwa tidak ada koefisien w^7, sehingga koef w^7 = 0]

Jadi nilai v^2 = 0

59. Jika p, q dan r adalah akar – akar berbeda dari $4x^3 + 7x^2 - 3x + 6 = 0$, maka nilai $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}$ adalah….

Jawab :
Dari soal diketahui bahwa persamaan polinom $4x^3 + 7x^2 - 3x + 6 = 0$ dengan akar – akar p, q dan , serta
$p + q + r = -\frac{b}{a}$, $pq + pr + qr = \frac{c}{a}$ dan $= -\frac{d}{a}$, dari **bentuk umum :** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Maka
$p + q + r = -\frac{7}{4}$, $pq + pr + qr = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ dan $= -\frac{6}{4}$.

Sehingga

$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \left(\frac{pq+pr+qr}{pqr}\right)^2 - 2\left(\frac{p+q+r}{pqr}\right)$

$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \left(\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{\left(-\frac{6}{4}\right)}\right)^2 - 2\left(\frac{\left(-\frac{7}{4}\right)}{\left(-\frac{6}{4}\right)}\right)$

$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{7}{6}\right)$

$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}= \frac{1}{4}-\frac{7}{3}=-\frac{25}{12}$

60. (OMITS 2012)
Tentukan jumlah semua koefisien dari *S(x)* jika
$S(x) = (1+x)^{1000}$ + x$(1+x)^{999}$ + $x^2(1+x)^{998}$+ . . . + x^{1000}

Jawab :
Kita cek untuk *n* sebagai pangkat, kita substitusikan nilai
n = 1 ⟹ S(x) = $(1+x)^1$ + x^1 = 1 + x + x = 1 + 2x , jika x = 1 ⟹ S(x) = 3
S(x) = 2^2-1
n = 2 ⟹ S(x) = $(1+x)^2$ +(1 + x).x + x^2 = $3x^2$ + 3x + 1 , jika x =1 ⟹ S(x) = 7
S(x) = 2^3-1
dst
n = 1000 ⟹ S(x) = $2^{1001}-1$

61. (Soal Olimpiade Sains 2012 Matematika SMA/MA. PORSEMA NU VIII PW. LP. MA'ARIF NU JAWA TENGAH)
Jika $f(x)=\frac{x}{x-1}$ maka $f(3x)$ dapat dinyatakan dengan :

a. $\frac{3f(x)}{2f(x)-1}$ b. $\frac{f(x)}{2f(x)+1}$ c. $\frac{3f(x)}{2f(x)+5}$
d. $\frac{3f(x)}{f(x)+1}$ e. $\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$

Jawab :
Dari soal diketahui $(x)=\frac{x}{x-1}$. Maka

$$f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\left(\frac{\left(\frac{3x}{x-1}\right)}{\left(\frac{3x-1}{x-1}\right)}\right)=\left(\frac{3\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{2x}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}}\right)=\left(\frac{3\left(\frac{x}{x-1}\right)}{2\left(\frac{x}{x-1}\right)+1}\right)=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

Jadi , pilihan jawaban yang benar adalah **E**

62. Jika diketahui $(3x)=\frac{3}{1+x}$, $x\neq -1$, berapakah nilai untuk $3f(x)$?

Jawab :
Diketahui $(3x)=\frac{3}{1+x}$, $x\neq -1$

Misalkan untuk $y = 3x$ dan $x = \frac{y}{3}$, maka $f(y) = \frac{3}{1+\left(\frac{y}{3}\right)} = \frac{9}{3+y}$

Sehingga $f(x) = \frac{9}{3+x}$ dan mengakibatkan $3f(x) = \frac{27}{3+x}$

63. Hitunglah nilai untuk $\sqrt{1 + 2010.2011.2012.2013}$

Jawab :
Kita misalkan $f(x) = \sqrt{1 + x(x+1)(x+2)(x+3)}$.
Sehingga kita sebenarnya mencari nilai $f(2010)$
$f(x) = \sqrt{1 + x(x+1)(x+2)(x+3)}$

$= \sqrt{1 + (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2)}$, misalkan saja $a = x(x+3)$

$= \sqrt{1 + a(a+2)}$

$= \sqrt{a^2 + 2a + 1}$

$= \sqrt{(a+1)^2}$

$= |x(x+3) + 1|$

$f(2010) = 2010.2013 + 1$

64. Jika fungsi f terdefinisikan untuk semua bilangan bulat positif serta memenuhi :

$$f(1) = 2012,$$

serta

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = n^2 f(n).$$

Tentukanlah nilai dari $f(2012)$?

Jawab :

- $f(1) = 1^2 f(1) = f(1) = 2012$
- $f(1) + f(2) = 2^2 f(2) = 4f(2)$

  $\Leftrightarrow 2012 + f(2) = 4f(2)$

  $\Leftrightarrow 3f(2) = 2012$

  $\Leftrightarrow f(2) = \frac{1}{3}.2012$
- $f(1) + f(2) + f(3) = 3^2 f(3) = 9f(3)$

  $\Leftrightarrow 2012 + \frac{1}{3}.2012 + f(3) = 9f(3)$

  $\Leftrightarrow 8f(3) = 2012 + \frac{1}{3}.2012 = \frac{4}{3}.2012$

  $\Leftrightarrow f(3) = \frac{1}{6}.2012$

- $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=4^2 f(4)=16f(4)$

  $\Leftrightarrow 2012+\frac{1}{3}.2012+\frac{1}{6}.2012+f(4)=16f(4)$

  $\Leftrightarrow 15f(4)=2012+\frac{1}{3}.2012+\frac{1}{6}.2012=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)2012=\frac{9}{6}.2012$

  $\Leftrightarrow f(4)=\frac{1}{10}.2012$

  dst

Dari uraian di atas didapatkan :

- $f(1)=2012$
- $f(2)=\frac{1}{3}.2012=\frac{1}{1+2}.2012$
- $f(3)=\frac{1}{6}.2012=\frac{1}{1+2+3}.2012$
- $f(4)=\frac{1}{10}.2012=\frac{1}{1+2+3+4}.2012$

  dst.

  Sehingga,

- $f(2012)=\frac{1}{1+2+3+\cdots+2012}.2012=\frac{1}{\frac{2012.2013}{2}}.2012=\frac{2}{2012.2013}.2012=\frac{2}{2013}$.

Jadi, $f(2012)=\frac{2}{2013}$.

65. Suatu fungsi didefinisikan sebagai
$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$, $f(4)=10$. Tentukan nilai dari $f(2012)$?

Jawab :

Dari soal diketahui bahwa

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ dan $f(4)=10$, maka

- $f(4)=f(0+4)=f(0)+f(4)+0.4 \Leftrightarrow 10=f(0)+10+0 \Rightarrow f(0)=0$
- $f(4)=f(2+2)=f(2)+f(2)+2.2 \Leftrightarrow 10=2f(2)+4 \Rightarrow f(2)=3$
- $f(4)=f(1+3)=f(1)+f(3)+1.3$
- $f(3)=f(1+2)=f(1)+f(2)+1.2$

Dari poin 3 dan 4 kita anggap sebagi persamaan 3 dan 4, sehing kalau kita tulis ulang maka

$f(4)=f(1+3)=f(1)+f(3)+1.3 \Rightarrow 10=f(1)+f(3)+3 \Rightarrow f(1)+f(3)=$

7………………………………..3)

$f(3)=f(1+2)=f(1)+f(2)+1.2 \Rightarrow\ f(3)=f(1)+3+2 \Rightarrow (1)-f(3)=-5$

……………………………………4)

Dengan metode eliminasi kita akan mendapatkan $f(1)=1, f(3)=6$.

Kalau kita tulis semuanya, maka

$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 6, dan\ f(4) = 10$ sehingga dari hasil bilangan yang kita dapatkan ternyata membentuk pola barisan bilangan dengan pola tertentu yaitu $U_n = f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sehingga $f(2012) = \frac{2012.2013}{2} = 1006.2013$

66. (OMITS 2012)
Jika suatu fungsi didefinisikan dengan
f(a) = FPB(2012,a)

g(a) = FPB(a,2012)

g^2(a) = (g(a))

g^3(a) = g(g(g(a)))

dst
Maka nilai $g^{2012}(f(100))$ adalah …

Jawab :
f(100) = FPB(2012,100) = 4, karena 2012 = 4 x 503 dan 100 = 4 x 25

503 adalah bilangan prima

g^{2012}(f(100)) = g^{2012}(4)

g^{2012}(4) = g^{2011} (f (4)) dengan g(4) = FPB(4,2012) = 4

Sehingga begitu seterusnya

Jadi g^{2012}(f(100)) = 4

67. (OMITS 2012)

Untuk fungsi *Ackermann* yang didefinisikan dengan beberapa fungsi sebagai berikut :

- f(0,y) = y – 1
- f(x + 1,y – 1) = f(0,f(x,y))
- g(x, 0) = 3
- g(x – 2, y + 1) = =f(x – 1, g(x,y))
- h(x,0) = 2
- h(h – 1, y) = g(x – 1, h(x – 2, y – 1))

- i(0, y + 1) = y – 1
- i(x,y) = h(y – 1, i(x – 1,y))

Nilai untuk *i(6,7)* adalah …

Jawab :

Melihat fungsi di atas tentunya filing kita sudah dapat menebak bahwa jawabannya pasti membutuhkan langkah yang panjang dan menjemukan.

Coba anda perhatikan pada fungsi di atas, untuk harga *x, y* pada fungsi *i* ternyata harganya tergantung dengan fungsi *h* dan fungsi *h* bergantung pada fungsi *g* demikian juga fungsi *f.*

Dan fungsi *g* sendiri berakhir dengan nilai konstan 3, silahkan anda cek sendiri

Sehingga Jawab fungsi *Ackermann* di atas adalah 3

68. Nilai dari

$$6-\cfrac{5}{3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{\vdots}}}}$$

Jawab :
Misalkan $x=6-\cfrac{5}{3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{\vdots}}}}$

$$-\cfrac{5}{3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{\vdots}}}}=x-6$$

$$\frac{-5}{x-6}=3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{\vdots}}}$$

Misalkan
$m=\frac{6}{6-x}$, maka

$m=3+\frac{4}{m}$, masing-masing ruas dikalikan dengan $m,\text{dengan } m>0$

$m^2-3m-4=0$

$(m+1)(m-4)=0$

$m=-1 \text{ atau } m=4$

Sehingga

$\frac{5}{6-x} = 4$

$5 = 4(6 - x)$

$5 = 24 - 4x$

$4x = 24 - 5$

$x = \frac{19}{4}$

Jadi, $x = \frac{19}{4}$

69. Tunjukkan $\sqrt{2}$ dalam bentuk *pembagian bersambung* (**continued fractions**)!

Jawab :

Misal $x^2 = 2$ maka $x = \sqrt{2}\ (untuk\ nilai\ positif)$, dan juga $x^2 - 1 = 1$ maka

$(x+1)(x-1) = 1 \iff (x-1) = \frac{1}{x+1} \iff x = 1 + \frac{1}{x+1}$

Perhatikan bahwa

$x = 1 + \frac{1}{x+1} \iff x = 1 + \frac{1}{1+x}$,

sehingga $x = 1 + \frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+x}\right)}$

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1 + \boldsymbol{x}}\right)} \iff x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \left(1 + \cfrac{1}{1 + \left(1 + \cfrac{1}{1 + \boldsymbol{x}}\right)}\right)}}$$

Jika substitusi untuk x kita teruskan , maka kita akan mendapatkan

$$x = \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}$$

70. Tunjukkan $\sqrt{13}$ dalam bentuk pembagian bersambung?

Jawab :

Pembahasan diserahkan kepada pembaca

71. Hitunglah $\sqrt[8]{2207-\frac{1}{2207-\frac{1}{2207-\cdots}}}$, nyatakan jawabannya dalam bentuk $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$,

dengan a, b, c, d adalah bilangan – bilangan bulat.

Jawab :
Perhatikan bahwa $x \neq 0$
Misal $x = \sqrt[8]{2207-\frac{1}{2207-\frac{1}{2207-\cdots}}}$, maka

$x^8 = 2207 - \frac{1}{2207-\frac{1}{2207-\cdots}} \Longrightarrow x^8 = 2207 - \frac{1}{x^8}$

$x^8 + \frac{1}{x^8} = 2207 \iff \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 = 2207 + 2 = 2209$

$\iff x^4 + \frac{1}{x^4} = \sqrt{2209} = 47$

$\iff \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 47 + 2 = 49$

$\iff x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{49} = 7$

$\iff \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2 = 9$

$\iff +\frac{1}{x} = 3$, masing – masing ruas dikalikan dengan x , maka didapatkan

$\iff x^2 - 3x + 1 = 0$

$\iff x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, sehingga

$\frac{a+b\sqrt{c}}{d} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

72. Untuk $x^{x^{x^{x^{\cdots}}}} = 2$, tentukan nilai x?

Jawab :
Perhatikan bahwa
$x^{x^{x^{x^{\cdots}}}} = 2$ dapat dituliskan $x^{\left(x^{x^{x^{\cdots}}}\right)} = 2 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$.

Bagaimana jika $x^{x^{x^{x^{\cdots}}}} = 4$?

73. (OMITS 2012)
Untuk bilangan positif x, dipenuhi kondisi

$2012 = \left.x^{x^{x^{x^{\cdots^{x^{2012}}}}}}\right\} terdiri\ dari\ 2012\ x$, tentukan nilai x?

Jawab :

$2012 = x^{x^{x^{\cdots^{x^{2012}}}}}$, karena x-nya sebanyak 2012 maka

$2012 = \left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right)^{2012} \Leftrightarrow \left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right)^{2012} = 2012 \Leftrightarrow x^{x^{x^{\cdots^{x}}}} = 2012^{\frac{1}{2012}} = \sqrt[2012]{2012}$

Untuk langkah berikutnya,

$2012^{\frac{1}{2012}} = \sqrt[2012]{2012} = \left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right)^{x}\Big\}\ dengan\ x\ sebanyak\ 2011\ dalam\ tanda\ kurung$

$\left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right) = \left(2012^{\frac{1}{2012}}\right)^{\frac{1}{x}} = 2012^{\frac{1}{2012x}}$.

$2012^{\frac{1}{2012x}} = \left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right)^{x}\Big\}\ dengan\ x\ sebanyak\ 2010\ dalam\ tanda\ kurung$

$\left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right) = \left(2012^{\frac{1}{2012x}}\right)^{\frac{1}{x}} = 2012^{\frac{1}{2012x^2}}$

Jika langkah seperti ini diteruskan sampai ruas kiri hanya tersisa satu x saja maka

$x = 2012^{\frac{1}{2012x^{2011}}} \Leftrightarrow x^{2012x^{2011}} = 2012$

Dengan menggunakan aturan logaritma, maka

log $x^{2012x^{2011}}$ = log 2012

$\Leftrightarrow 2012x^{2011}. \log x = \log 2012$

$\Leftrightarrow x^{2011} \log x = \frac{\log 2012}{2012}$

$\Leftrightarrow \log(x^{2011} \log x) = \log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)$

$\Leftrightarrow 2011 \log(x \log x) = \log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)$

$\Leftrightarrow \log(x \log x) = \frac{\log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)}{2011}$

$\Leftrightarrow \log(\log x^{x}) = \frac{\log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)}{2011}$

$\Leftrightarrow \log x^{x} = 10^{\frac{\log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)}{2011}}$

$\Leftrightarrow x^{x} = 10^{10^{\frac{\log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)}{2011}}}$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[x]{10^{10^{\frac{\log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)}{2011}}}}$$

74. Hitunglah nilai dari $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}}$

Jawab :

Misalkan $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}}$ kuadratkan masing-masing ruas, maka akan didapatkan

$$x^2 = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}}$$

$\Leftrightarrow x^2 = 2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0\ atau\ x = 2$

Jadi $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}} = 2$

75. Hitunglah nilai $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}$

Jawab :

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}} = 2$

Untuk caranya diserahkan pada pemirsa

76. Hitunglah nilai $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\ldots}}}}$

Jawab :

$$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\ldots}}}}=1$$

Untuk caranya juga diserahkan pada pemirsa

77. Hitunglah nilai $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\ldots}}}}}$

Jawab :
Misalkan

$x = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\ldots}}}}}$ kuadratkan masing-masing ruas, sehingga

$x^2 = 3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\ldots}}}}}}}}$ kuadratkan sekali lagi masing-masing ruas

$$(x^2)^2 = 9.5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{\ldots}}}}}}}}$$

$$x^4 = 45x$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 45x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 45) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ x = 0 \ atau \ x^3 = 45$$

$$\text{Jadi } \ x = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{\ldots}}}}}} = \sqrt[3]{45}$$

78. Tentukan nilai x yang memenuhi

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = \sqrt{4x+\sqrt{4x+\sqrt{4x+\cdots}}}$$

Jawab :
Untuk

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x \ldots}}} = x,\ x \geq 0$ (lihat contoh soal sebelumnya)

Sehingga

$x = \sqrt{4x + \sqrt{4x + \sqrt{4x + \cdots}}}$ (kuadratkan masing-masing ruas)

$x^2 = 4x + \sqrt{4x + \sqrt{4x + \sqrt{4x + \cdots}}}$

$x^2 = 4x + x = 5x$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x - 5) = 0$

$x = 0 \text{ atau } x = 5$

Jadi $x = 0 \text{ atau } x = 5$

79. (Baltic Way 1993 Mathematical Team Contest)
Carilah semua bilangan bulat n yang memenuhi persamaan
$\sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{256}{4} - n}}$ adalah bilangan bulat

Jawab :

Misalkan $x = \sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{256}{4} - n}}$, $x \in \text{Bilangan Bulat}$ kita

kuadratkan masing-masing ruas

$x^2 = \frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n} + \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n} + 2\sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{625}{4} - n\right)}$

$x^2 = 25 + 2\sqrt{n}$

- Untuk $n = 0 \Longrightarrow x^2 = 25$ jelas memenuhi, karena $25 = 5^2 \in \text{Bil. Bulat}$
- Untuk $n = 1 \Longrightarrow x^2 = 27 \Longrightarrow x = \sqrt{27}$ juga tidak memenuhi
- Untuk $n = 2$ juga tidak memenuhi
- Untuk $n = 3$ juga tidak memenuhi
- dst
- Untuk $n = 144 \Longrightarrow x^2 = 49$,memenuhi
- Untuk $n > 144$ tidak memenuhi untuk bilangan bulat karena akan menyebabkan bilangan negative dalam tanda akar(bilangan imajiner)

Jadi yang memenuhi adalah 0 dan 144

80. (Canadian MO 1998)

Carilah solusi x real yang memenuhi $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

Jawab :

Misalkan untuk $x\ real$ dan $x \neq 0$

$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

$x = \sqrt{\frac{1}{x}(x^2 - 1)} + \sqrt{\frac{1}{x}(x - 1)}$

$x = \sqrt{\frac{1}{x}(x + 1)(x - 1)} + \sqrt{\frac{1}{x}(x - 1)}$

$x = \sqrt{\frac{x-1}{x}}.\left(\sqrt{x + 1} + 1\right)$

$x = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.\left(\sqrt{x + 1} + 1\right)$

$\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}.\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x.\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x} = \sqrt{x + 1} - 1$

$\sqrt{x + 1} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1$ (kuadratkan masing-masing ruas)

$x + 1 + 1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x + 1 - 1 - \frac{1}{x}} = 1$

$x - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} + 1 = 0$

$\left(x - \frac{1}{x} - 1\right)\left(x - \frac{1}{x} - 1\right) = 0$

$\left(x - \frac{1}{x} - 1\right) = 0$ (masing-masing ruas dikalikan dengan x)

$x^2 - x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Jadi solusinya adalah $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

81. (OSN 2003 SMP/MTs)

Jika $a + b + c = 0$. Tunjukkan bahwa $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Jawab :

Diketahui $a+b+c=0$, maka ada 3 kemungkinan yaitu $\begin{cases} a+b=-c \\ a+c=-b \\ b+c=-a \end{cases}$

Perhatikan
$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+b)+3c^2(a+b)+6abc$

$0 = a^3+b^3+c^3+3a^2(-a)+3b^2(-b)+3c^2(-c)+6abc$

$0 = a^3+b^3+c^3-3a^3-3b^3-3c^3+6abc$

$0 = -2a^3-2b^3-2c^3+6abc$

$0 = -2(a^3+b^3+c^3)+6abc$

$2(a^3+b^3+c^3) = 6abc$

$a^3+b^3+c^3 = 3abc$ (terbukti)

82. Tentukan Himpunan Penyelesaian (HP) untuk persamaan

$$4\left(16^{sin^2x}\right) = 2^{6sinx} \text{ untuk } 0 \le x \le 2\pi.$$

Jawab :
$4\left(16^{sin^2x}\right) = 2^{6sinx}$ dengan $0 \le x \le 360^0$

$2^2\left(2^{4.sin^2x}\right) = 2^{6sinx}$

$2^{2+4sin^2x} = 2^{6sinx}$, ingat bahwa: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$

$2+4sin^2x = 6sinx$

$\Leftrightarrow 4sin^2x - 6sinx + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2sin^2x - 3sinx + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2sinx-1)(sinx-1) = 0$

$\Leftrightarrow sinx = \frac{1}{2} \text{ V } sin = 1$

- Untuk $sinx = \frac{1}{2}$, dengan rumus $x^0 = \alpha + k.360^0$ dan $x^0 = (180-\alpha)^0 + k.360^0$ didapatkan $x_1^0 = 30^0$ dan $x_2^0 = 150^0$.
- Untuk $sinx = 1$, didapatkan $x_3^0 = 90^0$.

Jadi, $\text{HP} = \{30^0, 90^0, 150^0\}$.

83. (OMITS 2012)
Ardo, Romdhoni, Ahmad, Aji dan Romi mengikuti pemilihan presiden RI secara

independen. Pada akhir perhitungan suara, yang mendapat suara tertinggi pertama a
kan
menjadi Presiden dan yang memperoleh suara tertinggi kedua akan menjadi wakilnya. Jika Ardo mendapatkan suara 2012 lebih banyak dari Romdhoni dan 2056 lebih sedikit dari Ahmad. Romi menerima 2012 suara lebih sedikit dari Aji dan 2076 suara lebih banyak dari Romdhoni. maka yang terpilih jadi Presiden dan wakilnya adalah ...

Jawab :
Ardo = 2012 + Romdhoni ----------- 1)
Ardo - Romdhoni = 2012
Ardo = -2056 + Ahmad ---------------2)
Ahmad - Ardo = 2056
Romi = -2012 + Aji --------------------3)
Aji - Romi = 2012
Romi = 2076 + Romdhoni -------------4)
Romi - Rhomdhoni = 2076
Maka
Dari persamaan 4 dan 3 diperoleh Aji - Romdhoni = 4088 -------------------5)
persamaan 2 dan 1 diperoleh Ahmad - Romdhoni = 2078 -------------------6)
Dari persamaan 5 dan 6 diperoleh Aji - Ahmad = 10
Sehingga dari beberapa persamaan di atas didapatkan

- Aji = Ahmad + 10 --------------> Aji > Ahmad
- Ahmad = Ardo + 2056 ---------> Ahmad > Ardo
- Aji = Romi + 2012 --------------> Aji > Romi
- Romi = Romdhoni + 2076 -----> Romi > Romdhoni

Jadi dari uraian diatas jelas yang jadi Presiden = yang mendapatkan nilai terbanyak adalah Aji dan Ahmad sebagai wakilnya

84. Tentukan nilai $a \text{ x } b \text{ x } c \text{ x } d \text{ x } e \text{ x } f$, jika

$a + b + c + d + e + 0 = 20$

$a + b + c + d + 0 + f = 19$

$a + b + c + 0 + e + f = 18$

$a + b + 0 + d + e + f = 17$

$a + 0 + c + d + e + f = 16$

$0 + b + c + d + e + f = 15$

Jawab :
Kalau kita tulis lagi, kemudian kita jumlahkan maka
$a + b + c + d + e + 0 = 20$ ....1)

$a + b + c + d + 0 + f = 19$ ....2)

$a + b + c + 0 + e + f = 18$ ....3)

$a + b + 0 + d + e + f = 17$ ....4)

$a + 0 + c + d + e + f = 16$ ....5)

$0 + b + c + d + e + f = 15$ ....6)

______________________ +

$5(a + b + c + d + e + f) = 105$

$\Rightarrow a + b + c + d + e + f = 21$ ....7)

Selanjutnya eliminasikan persamaan 7) dengan 1) maka akan menghasilkan $f = 1$, persamaan 7) dengan 2) menghasilkan $e = 2$, persamaan 7) dengan 3) menghasilkan $d = 3$ demikian seterusnya dan akan kita dapatkan berturut-turut $c = 4, b = 5, \text{dan } a = 6$

Sehingga nilai $a \text{ x } b \text{ x } c \text{ x } d \text{ x } e \text{ x } f = 6.5.4.3.2.1 = 720$

85. Carilah semua nilai a, b, c yang memenuhi sistem persamaan berikut :

$a^2 + ab + ac = 21,$

$b^2 + bc + ab = 11,$

$c^2 + ac + bc = 17.$

Jawab :

$a^2 + ab + ac = 21$ ...... 1)

$b^2 + bc + ab = 11$ ...... 2)

$c^2 + ac + bc = 17$ .... 3)

Jika ketiga persamaan di atas dijumlahkan maka akan didapatkan

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 49 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 7^2 \Leftrightarrow a + b + c = \pm 7$

- Untuk $a + b + c = \pm 7 \Rightarrow b + c = \pm 7 - a$ kita substitusikan ke persamaan 1), maka akan didapatkan $a^2 + a(b + c) = 21 \Rightarrow a^2 + a(\pm 7 - a) = 21$. Sehingga $a^2 \pm 7a - a^2 = 21 \Rightarrow \pm 7a = 21 \Rightarrow a = \pm 3$.
- Dengan cara yang sama kita akan mendapatkan untuk nilai $b = \pm \frac{11}{7}$ dan $c = \pm \frac{17}{7}$

Jadi, nilai $a = \pm 3, b = \pm \frac{11}{7}$ dan $c = \pm \frac{17}{7}$.

86. (Baltic Way 1999)
Carilah semua bilangan real $a, b, c, \text{dan } d$ yang memenuhi sistem persamaan sebagai berikut :

$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1$

$bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9$

$cda + cd + da + ac + c + d + a = 9$

$dab + da + ab + bd + d + b + a = 9$

Jawab :
Perhatikan bahwa
$(a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$

Pada persamaan yang pertama dari soal di atas kita akan mendapatkan

$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1) = 2$ ....1)

Sehingga tiga persamaan yang lain berturut-turut adalah

$(b+1)(c+1)(d+1) = 10$ ....2)

$(c+1)(d+1)(a+1) = 10$ ....3)

$(d+1)(a+1)(b+1) = 10$ ....4)

Dan jika persamaan 1), 2), 3), dan 4) apa bila semua dikalikan maka akan menghasilkan $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 10\sqrt[3]{2}$ ....5)

Dari persamaan 1 dan 2 didapatkan $\frac{(a+1)\cancel{(b+1)(c+1)}}{\cancel{(b+1)(c+1)}(d+1)} = \frac{(a+1)}{(d+1)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Sehingga $(d+1) = 5(a+1)$ dan dari persamaan 2 dan 3 di peroleh $(a+1) = (b+1)$ serta dari persamaan 3 dan 4 diperoleh $(b+1) = (c+1)$

Sehingga

$(a+1) = (b+1) = (c+1) = \frac{1}{5}(d+1)$

Selanjutnya dari persamaan 5) kita dapatkan

$(a+1)(a+1)(a+1)5(a+1) = 10\sqrt[3]{2} \implies 5(a+1)^4 = 10\sqrt[3]{2} \implies (a+1)^4 = 2\sqrt[3]{2}$

$\implies (a+1)^4 = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} \implies (a+1) = 2^{4.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \implies a = \sqrt[3]{2} - 1$

Dan $a = b = c = \sqrt[3]{2} - 1$ dan $d = 5\left(\sqrt[3]{2} - 1 + 1\right) - 1 = 5\sqrt[3]{2} - 1$

87. Jika $a, b, c, \text{dan } d$ adalah bilangan bulat dan
$ab + c + d = 3$

$bc + a + d = 5$

$cd + a + b = 2$

$ad + b + c = 6$

Tentukan semua solusi untuk $a, b, c, \text{dan } d$

Jawab :
Misalkan
$ab + c + d = 3$ ....1)

$bc + a + d = 5$ ....2)

$cd + a + b = 2$ ....3)

$ad + b + c = 6$ ....4)

Untuk eliminasi persamaan 4) dan 1) akan diperoleh
$ad - ab + b + c - (c + d) = 3 \Rightarrow a(d - b) + (b - d) = 3$

$\Rightarrow -a(b - d) + (b - d) = 3 \Rightarrow (b - d)(1 - a) = 3$ ....5)

Pada eliminasi 2) dan 3) dengan langkah yang kurang lebih sama akan diperoleh

$(b - d)(c - 1) = 3$ ....6)

Dari persamaan 5) dan 6) diperoleh
$\cancel{(b - d)}(1 - a) = \cancel{(b - d)}(c - 1) \Rightarrow a + c = 2$ ....7)

Dan pada penjumlahan persamaan 1) dan 2) akan diperoleh
$b(a + c) + a + c + 2d = 8$, kita substitusikan $a + c = 2$ ke persamaan di samping

sehingga diperoleh $b + d = 3$ ....8)

Selanjutnya pada eliminasi 2) dan 1) diperoleh $b(c - a) + (a - c) = 2$ ....9)

serta pada eliminasi 4) dan 3) diperoleh $d(c - a) + (a - c) = 4$ ....10)

Eliminasi persamaan 9) dan 10) akan menghasilkan
$(b + d)(c - a) + 2(a - c) = -2$,kita substitusikan $b + d = 3$ ke persamaan di

samping sehingga diperoleh $a - c = 2$ ....11)

Dari persamaan 7) dan 11) kita eliminasi maka akan diperoleh nilai $a = 2$ dan

$c = 0$. Kalau hasil ini kita substitusikan ke persamaan 1) akan diperoleh nilai

$b = 0$ dan $d = 3$

Jadi nilai $a = 2$, $b = c = 0$ dan $d = 3$

88. Jika α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 1 = 0$,maka nilai dari $5\alpha^4 + 12\beta^3$ adalah

Jawab :
Dari soal diketahui bahwa
$x^2 - 2x - 1 = 0$ dengan $a = 1$, $b = -2$, dan $c = -1$

- $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2$ ....1)
- $\alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{\beta}$ atau $\beta = \frac{-1}{\alpha}$ ....2)

Selanjutnya substitusikan persamaan 2) ke persamaan 1) sehingga
$\alpha + \beta = 2$

$\alpha + \frac{-1}{\alpha} = 2$

$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$

$\alpha_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$

$\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$

Sehingga kita dapat memilih $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ dan $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

Maka $5\alpha^4 + 12\beta^3 = 5\left(1 + \sqrt{2}\right)^4 + 12\left(1 - \sqrt{2}\right)^3$

$5\left(1 + \sqrt{2}\right)^4 + 12\left(1 - \sqrt{2}\right)^3 = 5\left(17 + 12\sqrt{2}\right) + 12\left(7 - 5\sqrt{2}\right)$

$5\left(1 + \sqrt{2}\right)^4 + 12\left(1 - \sqrt{2}\right)^3 = 85 + 60\sqrt{2} + 84 - 60\sqrt{2} = 169$

Jadi nilai dari $5\alpha^4 + 12\beta^3$adalah 169

89. Carilah semua nilai c sehingga persamaan $x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 8c} = 0$ mempunyai tepat 2 akar nyata untuk x.

Jawab :
$x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 8c} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - c = \sqrt{8x^2 - 32x - 8c}$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x - c)^2 = 8(x^2 - 4x - c)$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - c = 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - c - 8 = 0$

Karena mempunyai 2 akar nyata maka D > 0
$b^2 - 4ac > 0$

$\Leftrightarrow (-4)^2 - 4.1.(-c - 8) > 0$

$\Leftrightarrow 16 + 4c + 32 > 0$

$\Leftrightarrow c > -12$

Jadi, semua nilai c adalah > -12 , $c \in R$.

90. (OMITS 2012)
Persamaan kuadrat (PK) mempunyai koefisien bilangan bulat dan akar-akarnya cos 72^0 dan cos 144^0 adalah …

Jawab :
PK tersebut mempunyai akar-akar x_1 = cos 72^0= $\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)$ dan x_2 = cos 144^0 = $\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}\right)$

PK barunya adalah

x^2 -(x_1+x_2)x + $x_1 . x_2$ = 0

x_1 + x_2 = $\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)$ + $\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}\right)$= -1/2

$x_1 . x_2$ = [$\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)$].[$\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}\right)$] = -1/4

Sehingga

x^2 - (x_1+x_2)x + $x_1 . x_2$ = 0

x^2 - ($-\frac{1}{2}$)x + $\left(-\frac{1}{4}\right)$ = 0

Maka persamaan menjadi

$4x^2 + 2x - 1 = 0$

Jadi PK tersebut adalah $4x^2 + 2x - 1 = 0$

91. Jika $|x|$ menyatakan nilai mutlak x, dimana $|x| = \begin{cases} x & jika\ x \geq 0 \\ -x & jika\ x < 0 \end{cases}$
Selesaikan persamaan $|x - 2| = 3$

Jawab :
Alternatif 1:
Jika $x \geq 2$, maka $x - 2 = 3$ sehingga $x = 5$

Tetapi bila $x < 2$, maka $2 - x = 3$ sehingga $x = -1$

Alternatif 2:
Karena $|x - 2|$ tidak akan pernah berharga negative maka kita dapat mengkuadratkan masing-masing ruas, sehingga
$(x - 2)^2 = 3^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5 \;\; atau \;\; x = -1$

92. Carilah x yang memenuhi $x^2 + 4|x| - 5 = 0$

Jawab :
Jika $x \geq 0$, maka $x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -5 \; atau \; x = 1$
Karena $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 4x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$, jadi yang memenuhi $x = 1$.
Jika $x < 0$, maka $x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \; atau \; x = \; -1$
Karena $\begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$, jadi yang memenuhi $x = -1$
Jadi nilai x yang diinginkan adalah -1 dan 1

93. (OMITS 2012)
Ada sebuah bilangan real x yang memenuhi persamaan :

$$J = 1 + \frac{x + 1922}{4119 + 2x} - \frac{\sqrt{|x| - 2012} + \sqrt{2012 - |x|}}{|2012 - x|}$$

Jumlah 2012 bilangan pertama disebelah kanan tanda koma adalah

Jawab :
Pada penyebut pecahan yang berupa harga mutlak ($|2012 - x| \neq 0$) tidak boleh berharga nol, tetapi kalau yang berharga nol pembilangnya tidak masalah, bahkan akan mempermudah perhitungan kita, sehingga untuk itu kita pilih $= -2012$.
Untuk $x = -2012 \Rightarrow J = 1 + \frac{-2012+1922}{4119+2(-2012)} - \frac{\sqrt{|-2012|-2012}+\sqrt{2012-|-2012|}}{|2012-(-2012)|}$

$J = 1 + \frac{-90}{95} - \frac{\sqrt{0}+\sqrt{0}}{|4024|}$

$J = 1 - \frac{18}{19}$

$J = \frac{1}{19} = 0,\underbrace{052631578947368421}_{\text{perhatikan bilangan yang berulang ada setiap 18 digit}}\,052631578947368421 \ldots$

Karena perulangan disebelah kanan tanda koma terjadi setiap 18 digit dan $2012 = 18 \text{ x } 111 + 14$ maka jumlah ke-18 digit pertama adalah 81 serta 14 digit pertama adalah 66.
Sehingga total jumlah 2012 digit pertama sebelah kanan tanda koma adalah $81 \text{ x } 111 + 66 = 9057$

Jadi jumlah 2012 digit pertama di sebelah kanan tanda koma pada soal di atas adalah 9057.

94. Bentuk sederhana dari

$$\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$

Jawab :
ingat

$$(x \pm y) = \left(\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)$$

Sehingga

$$\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)} = \frac{\sqrt[3]{2^2}-1}{2-1} = \sqrt[3]{4}-1$$

95. Carilah semua nilai x yang memenuhi

$$\sqrt[3]{13x+37} - \sqrt[3]{13x-37} = \sqrt[3]{2}$$

Jawab :
Misalkan $a = 13x + 37$ dan $b = 13x - 37$, maka $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{2}$.

Sehingga

$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{2}$ (masing – masing ruas di pangkatkan tiga)

$a = b + 2 + 3\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{2}\right)$

$\Leftrightarrow a - b - 2 = 3\sqrt[3]{2b}.\left(\sqrt[3]{a}\right)$

$\Leftrightarrow a - b - 2 = 3\sqrt[3]{2ab}$

$\Leftrightarrow (13x + 17) - (13x - 37) - 2 = 3\sqrt[3]{2(13x + 37)(13x - 37)}$

$\Leftrightarrow 72 = 3\sqrt[3]{2((13x)^2 - 37^2)}$

$\Leftrightarrow 24 = \sqrt[3]{2((13x)^2 - 37^2)}$

$\Leftrightarrow 24.24.24 = 2.((13x)^2 - 37^2)$

$\Leftrightarrow ((13x)^2 - 37^2) = 12.24.24$

$\Leftrightarrow (13x)^2 - 1369 = 6912$

$\Leftrightarrow (13x)^2 = 8281 = 91^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 7^2$

$\Leftrightarrow x = \pm 7$

Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $= \pm 7$.

96. Jika diberikan $a + b + c = 0$, tentukanlah nilai dari

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$$

Jawab :

Dari soal kita dapatkan ,

$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = \frac{a^3}{abc} + \frac{b^3}{abc} + \frac{c^3}{abc} = \frac{1}{abc}(a^3 + b^3 + c^3)$, dengan $a + b + c = 0$.

Perhatikan bahwa ,

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3ac(a + c) + 3bc(b + c) + 6abc$

$\Leftrightarrow 0^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(-c) + 3ac(-b) + 3bc(-a) + 6abc$

$\Leftrightarrow 0 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$

Sehingga

$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = \frac{1}{abc}(a^3 + b^3 + c^3) = \frac{3abc}{abc} = 3$

Jadi, nilai $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = 3$.

97. (OMITS 2012)

Jika $\begin{cases} x^{(x+y)} = y^{12} \\ y^{(x+y)} = x^3 \end{cases}$

Tentukan solusi bulat untuk sistem persamaan di atas!

Jawab :

Misalkan kita gunakan aturan logaritma sebagai berikut;

$x^{(x+y)} = y^{12} \Rightarrow$ (x+y) log x = 12 log y .... 1)

$y^{(x+y)} = x^3 \Rightarrow$ (x+y) log y = 3 log x ....2)

Dari persamaan 2) diperoleh :

$\log y = \frac{3 \log x}{(x+y)}$ ....3)

Persamaan 3) disubstitusikan ke persamaan 1), sehingga diperoleh

$(x + y)^2$= 3.12 = 36

sehingga (x+y +6)(x+y – 6) = 0

maka (x+y) = – 6 v (x+y) = 6

i) *untuk x+y = 6 , karena x dan y bulat,untuk harga positif, yang memungkinkan adalah*

x = 0, y = 6
x = 1, y = 5
x = 2, y = 4
x = 3, y = 3
x= 4, y = 2
x = 5, y = 1
x = 6, y = 0
ambil yang x = 4 dan y = 2, maka $x^6 = y^{12}$ dan $y^6 = x^3$ akan dipenuhi

ii) *untuk x+y = -6, tidak ada yang dipenuhi*
Jadi hanya ada **satu** jawaban

98. (OSK 2010)
Solusi bilangan bulat untuk pertidaksamaan $x^4 \leq 8x^2 - 16$ ada sebanyak?

Jawab :
$x^4 - 8x^2 - 16 \leq 0$

$(x^2 - 4)(x^2 - 4) \leq 0$

$(x^2 - 4)^2 \leq 0$

$\left((x+2)(x-2)\right)^2 \leq 0$

Jadi ada 2 yaitu $x = -2$ dan $x = 2$

99. (OSP 2004)
Tentukan semua solusi real x untuk $x^2 < |2x - 8|$

Jawab :
$x^2 < |2x - 8|$

$x^2 < \sqrt{(2x-8)^2}$ (masing-masing ruas dikuadratkan)

$(x^2)^2 < (2x - 8)^2$

$(x^2 + 2x - 8)(x^2 - 2x + 8) < 0$, [$(x^2 - 2x + 8)$ tidak memiliki solusi real]

Cukup $(x^2 + 2x - 8) < 0$

$(x + 4)(x - 2) < 0$,sehingga batas x adalah $-4 < x < 2$

Jadi solusi real x adalah $-4 < x < 2$

100. Jika $x, y \neq 0$, tunjukkan bahwa

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Jawab :

Tanpa mengurangi keumuman pada dua buah bilangan $, y \neq 0$, maka

$$(x-y)^2 \geq 0$$

atau

$$x^2+y^2 \geq 2xy$$

Bagi kedua ruas dengan xy, diperoleh

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$ (terbukti)

101. Jika untuk a, b, c dan d adalah bilangan – bilangan real positif , buktika bahwa :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4.$$

Jawab :

Berdasarkan $AM \geq GM$

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}}$$

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}}{4} \geq \sqrt[4]{1}$$

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}}{4} \geq 1$$

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4$ (terbukti)

102. (AIME 1987)

Carilah bilangan bulat terbesar n sehingga ada bilangan unik k yang memenuhi $\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13}$

Jawab :

Perhatikan $\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13} \Rightarrow \frac{15}{8}>\frac{n+k}{n}>\frac{13}{7}$

$\frac{15}{8}\cdot\frac{7}{7}>\frac{n+k}{n}>\frac{13}{7}\cdot\frac{8}{8}$

$\frac{105}{56}>\frac{n+k}{n}>\frac{104}{56}$

$\frac{210}{112}>\frac{n+k}{n}>\frac{208}{112}$ (misalkan saja $\frac{210}{112}>\frac{112+97}{112}>\frac{208}{112}$)

Jadi $n=112$

103. Buktikan bahwa, untuk $a_1 > 0$, maka $(\sum_{i=1}^{n} a_1)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1}\right) \geq n^2$

Jawab :
Perhatikan bahwa
Untuk ketaksamaan AM-GM sebagai berikut

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$$

Untuk ketaksamaan GM-HM

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Selanjutnya untuk ketaksamaan AM-HM

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Sehingga diperoleh

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

atau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1}\right) \geq n^2$$

Jadi, terbukti.

104. Jika $x, y, \text{dan } z$ adalah bilangan positif yang berbeda, buktikan bahwa

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$$

Jawab :
Perhatikan bahwa
Untuk ketaksamaan AM-GM

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq 2\sqrt{\frac{1}{zx}}$$

Dari tiga bentuk ketaksamaan di atas apa bila semua dijumlahkan, maka kita akan mendapatkan

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 2\left(\sqrt{\frac{1}{xy}}+\sqrt{\frac{1}{yz}}+\sqrt{\frac{1}{zx}}\right)$$

atau

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}+\sqrt{\frac{1}{yz}}+\sqrt{\frac{1}{zx}} \text{ (terbukti)}$$

105. Untuk polinom $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ deengan 4 akar real positif, buktikan bahwa :

a) $pr-16s \geq 0$

b) $q^2-36s \geq 0$

Jika keempat akarnya sama maka tanda ketaksamaan berubah menjadi kesamaan

Jawab :

$p=-(a+b+c+d\,)$

$q=ab+ac+ad+bc++bd+cd$

$r=-(abc+abd+acd+bcd)$

$s=abcd$

Sehingga

a) $pr=(a+b+c+d\,)(abc+abd+acd+bcd)$

Menurut AM-GM

$$a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd} \text{ dan}$$

$$abc+abd+acd+bcd \geq 4\sqrt[4]{(abcd)^3}$$

Shingga

$$(a+b+c+d\,)(abc+abd+acd+bcd) \geq 4.4.\sqrt[4]{abcd}.\sqrt[4]{(abcd)^3}=16abcd$$

maka

$$(a+b+c+d\,)(abc+abd+acd+bcd)-16abcd \geq 0$$

atau

$$pr-16s \geq 0$$

b) $q=ab+ac+ad+bc++bd+cd$,dan $s=abcd$ serta

$q^2=(ab+ac+ad+bc++bd+cd)^2=(ab+ac+ad+bc++bd+cd)(ab+ac+ad+bc++bd+cd)$

Sehingga

Menurut AM-GM

$$ab+ac+ad+bc++bd+cd \geq 6\sqrt[6]{(abcd)^3}$$

Jika masing-masing ruas dikuadratkan akan kita dapatkan

$$(ab+ac+ad+bc++bd+cd)^2 \geq 36abcd$$

maka

$$(ab+ac+ad+bc++bd+cd)^2-36abcd \geq 0$$

atau

$$q^2 - 36s \geq 0$$

Jadi untuk poin a) dan b) keduanya terbukti

106. Urutan dari yang terkecil sampai paling besar dari ketiga bilangan berikut adalah
$x = \sqrt{0{,}25}$, $= \sqrt[3]{0{,}124}$, dan $z = \sqrt[4]{0{,}0626}$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

107. (OMITS 2012)
Jika Un = C(n,0) + C(n-1,1) + C(n-2,2) + C(n-3,3) + . . . untuk *n* ≥ 1
Tentukan nilai U2012?

Jawab :
U_1 = C(1,0) + C(0,1) = 1 + 0 = 1
U_2 = C(2,0) + C(1,1) + C(0,2) = 1 + 1 + 0 = 2
U_3 = C(3,0) + C(2,1) + C(1,2) + C(0,3) = 1 + 2 + 0 + 0 = 3
U_4 = C(4,0) + C(3,1) + C(2,2) + C(1,3) + C(0,4) = 1 + 3 + 1 + 0 + 0 = 5
dst
Perhatikan bahwa $U_3 = U_2 + U_1$ dan $U_4 = U_3 + U_2$ atau $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ adalah barisan *Fibonacci*
Gunakan rumus $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k}$, untuk F_{n+1} adalah suku ke *n* pada barisan *Fibonacci*.
Sehingga $U_{2012} = \sum_{k=0}^{2011} \binom{2012-k}{k}$

108. (OMITS 2012)
Sebuah barisan didefinikan bahwa suku-sukunya merupakan penjumlahan faktor-faktor dari suku sebelumnya kecuali dirinya sendiri. Jika U_1 = 2012 dan U_n = *n*. Nilai *n* tersebut adalah …

Jawab :
U_1 = 2012, sebagai suku pertama
Faktor dari 2012 adalah 1, 2, 4, 503, 1006, 2012 tetapi 2012 sebagai faktor terakhir tidak diperlukan untuk memunculkan U2 = 1+ 2 + 4 + 503 + 1006 = 1516, untuk suku berikutnya akan saya tuliskan faktor yang tidak dirinya sendiri
U_2 = 1516
Faktor dari 1516 adalah 1, 2, 4, 379, 758 , 1516 dan jumlah faktornya adalah 1144
U_3 = 1144
Faktornya adalah 1, 2, 4, 8, 11, 13, 22, 26, 44, 52, 88, 104, 143, 286, 572, 1144 dan jumlahnya adalah 1376
U_4 =1376

Faktornya adalah 1, 2, 4, 8, 16, 32, 43, 86, 172, 344, 688, 1376 dan jumlahnya adalah 1396
U_5 = 1396
Faktornya adalah 1, 2, 4, 349, 698, 1396 dan jumlahnya adalah 1054
U_6 = 1054
Faktornya adalah 1, 2, 17, 34, 62, 527, 1054 dan jumlahnya adalah 674
U_7 = 674
Faktornya adalah 1, 2, 337, 674 dan jumlahnya adalah 340
U_8 = 340
Faktornya adalah 1, 2, 4, 5, 10, 17, 20, 34, 68, 85,170, 340 dan jumlahnya adalah 416
U_9 = 416
Faktornya adalah 1, 2, 4, 8, 16, 32, 13, 26, 52, 104, 208, 416 dan jumlahnya adalah 466
U_{10} = 466
Faktornya adalah 1, 2, 233, 466 dan jumlahnya adalah 236
U_{11} = 236
Faktornya adalah 1, 2, 4, 59, 118, 236 dan jumlahnya adalah 184
U_{12} = 184
Faktornya adalah 1, 2, 4, 8, 23, 46, 92, 184 dan jumlahnya adalah 176
U_{13} = 176
Faktornya adalah 1, 2, 4, 8, 16, 11, 22, 44, 88, 176 dan jumlahnya 196
U_{14} = 196
Faktornya adalah 1, 2, 4, 7, 14, 14, 28, 49, 98, 196 dan jumlahnya 217
U_{15} = 217
Faktornya adalah 1, 7, 31, 217 dan jumlahnya adalah 39
U_{16} = 39
Faktornya adalah 1, 3, 13, 39 dan jumlanya adalah 17
U_{17} = 17
Jadi U_n = *n* dengan nilai *n* =17

109. (OMITS 2012)
Tentukan nilai dari

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ ...+\frac{1}{2012.2013.2014.2015}$$

Jawab :
Sebenarnya soal seperti ini mudah ditebak dalam proses menyelesaikannya pasti menggunakan *prinsip teleskopik*, yaitu saling menghabiskan suku sebelahnya

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ ...+\frac{1}{2012.2013.2014.2015}$$

Pecahlah masing masing-masing bilangan pecahan di atas menjadi penguran 2 bilangan pecahan dari bilangan(penyebut) pembentuknya

Perhatikan untuk

$$\frac{1}{1.2.3.4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)$$
$$\frac{1}{2.3.4.5}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{60}\right)$$

...
...
...
dst

$\frac{1}{2012.2013.2014.2015}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2012.2013.2014}-\frac{1}{2013.2014.2015}\right)$

Perhatikan dengan prinsip teleskopik akan terlihat unik
Kita tulis ulang untuk langkah solusi di awal tadi, yaitu

$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ ...+\frac{1}{2012.2013.2014.2015}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}+\ ...+\frac{1}{2012.2013.2014}-\frac{1}{2013.2014.2015}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2013.2014.2015}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2013.2014.2015}\right)$

Jadi,

$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ ...+\frac{1}{2012.2013.2014.2015}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2013.2014.2015}\right)$

110. Tentukan nilai dari $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{2012.2013.2014}$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

111. Tentukan nilai dari $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{2012.2013}$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

112. (OMITS 2012)
Tentukan nilai dari

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{10}+\frac{5}{24}+\frac{8}{65}+\frac{13}{168}+\frac{21}{442}+\ .\ .\ .=\ .\ .\ .$

Jawab :
Deret bilangan di atas merupakan deret teleskopik, coba anda perhatikan penguraian dari bilangan di atas

$\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$

$\frac{3}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

$\frac{5}{24} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8}$

$\frac{8}{65} = \frac{1}{5} - \frac{1}{13}$

$\frac{13}{168} = \frac{1}{8} - \frac{1}{21}$

$\frac{21}{442} = \frac{1}{13} - \frac{1}{34}$

….. = …..
dst
______________________ +
1 + 1 = 2
Jadi
$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \frac{5}{24} + \frac{8}{65} + \frac{13}{168} + \frac{21}{442} + ... = 2$

113. Jika pada sebuah deret aritmatika yang terdiri dari n suku (ganjil), dengan suku tengahnya 20 dan beda deret tersebut adalah 3 serta jumlah seluruh sukunya 260. Tentukan U_6

Jawab :
Pada deret aritmatika berlaku jumlah seluruh suku = $S_n = n.U_t$.
Diketahui beda = $b = 3$
$260 = n.20 \Longrightarrow n = 13$,jelas $U_t = suku\ tengah = U_7$
$U_7 = a + 6b = 20 \Longrightarrow a + 6.3 = 20 \Longrightarrow a = 20 - 18 = 2$
$U_6 = a + 5b = 2 + 5.3 = 2 + 15 = 17$
Jadi suku ke enam adalah 17

114. Jika pada suatu deret aritmatika diketahui $u_2 + U_5 + U_6 + U_9 = 40$, maka S_{10}

Jawab :
$u_2 + U_5 + U_6 + U_9 = (a + b) + (a + 4b) + (a + 5b) + (a + 8b) = 40$
Sehingga
$4a + 18b = 40 \Longrightarrow 2a + 9b = 20$
Maka $S_{10} = \frac{10}{2}(U_1 + U_{10}) = 5(a + a + 9b) = 5(2a + 9b) = 5.20 = 100$
Jadi jumlah sepuluh suku pertama adalah 100.

115. (OMITS 2012)

Untuk jumlah 6036 suku pertama deret geometri adalah 1141 dan jumlah 4024 suku pertamanya sama dengan 780, maka jumlah 2012 suku pertamanya adalah. …

Jawab :
Misalkan suku pertama U_1= a, U_2= ar, U_3= ar^2, dan S_{2012} = jumlah 2012 suku pertama, S_{4024} = jumlah 4024 suku pertama serta S_{6036} = jumlah 6036 suku pertama, dimisalkan S_{2012} = x, ditanya S_{2012}?

maka, ($S_{4024} - S_{2012}$) x ($S_{4024} - S_{2012}$) = (S_{2012}) x ($S_{6036} - S_{4024}$)

Sehingga (780 – x)(780 – x) = x. (1141 – 780)

608400 -1560x + x^2 = 361.x

$x^2 - 1921x + 608400 = 0$

(x – 400)(x – 1521) = 0

x = 400 v x = 1521

Jadi, dengan melihat deretnya maka S_{2012} = x = 400.

116. (OMITS 2012)
Banyaknya cara untuk mengganti tanda Δ dengan tanda ″ + ″ atau ″ – ″ sehingga
1 Δ 2 Δ 3 Δ 4 Δ 5 Δ 6 Δ 7 Δ 8 Δ 9 Δ 10 = 29

Jawab :
Supaya 1 Δ 2 Δ 3 Δ 4 Δ 5 Δ 6 Δ 7 Δ 8 Δ 9 Δ 10 = 29 dengan mengganti tanda Δ dengan tanda ″ + ″ atau ″ – ‟

adalah, kita gunakan cara coba-coba maka akan ketemu, sebanyak kemungkinan ada 8 cara

117. (OMITS 2012)
Bilangan tiga digit yang merupakan faktorial dari digit-digitnya adalah …

Jawab :
Perhatikan bahwa
1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120

6! = 720
Yang agak mungkin adalah bilangan tersebut ≤ 5!
Dengan cara coba-coba, misalkan
123 ≠ 1! + 2! + 3!
123 ≠ 1 + 2 + 6 = 9
Coba yang ini
145 = 1! + 4! + 5! = 1 + 24 + 120 = 145
Jadi bilangan tersebut 145

118. (OMITS 2012)
Untuk pasangan bilangan bulat (*x,y,n*) yang memenuhi :

$$\frac{(x! + y!)}{n!} = 3^n$$

Maka nilai maksimum dari $x + y + n$ adalah …

Jawab :
Pada pasangan (*x,y,n*) berlaku

$$\frac{(x! + y!)}{n!} = 3^n,$$

maka
x! + y! = n!. 3^n

- untuk $x = y = 0$ dan $n = 0$ atau (0,0,0) memenuhi
- untuk $x = 1$, $y = 0$ dan $n = 0$ atau (1,0,0) tidak memenuhi
- untuk $x = 0$, $y = 1$ dan $n = 0$ atau (0,1,0) tidak memenuhi
- untuk $x = 2$, $y = 1$ dan $n = 1$ atau (2,1,1) memenuhi
- untuk $x = 1$, $y = 2$ dan $n = 1$ atau (1,2,1) juga memenuhi
- untuk yang lain silahkan cek sendiri dan tidak ada yang memenuhi

Sehingga nilai maksimum untuk $x + y + n$ = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4

119. (OMITS 2012)
Jika diketahui :
π = 3, 141592…(Bilangan pi)
$\emptyset$ = 1, 618033…(Golden ratio)
γ = 0, 577215…(Konstanta euler)
e = 2, 718282…(Bilangan natural)
Diantara bilangan berikut yang mempunyai nilai terbesar?
a. π^e *b.* e^π c. e^γ d. $\pi^\emptyset$ e. $\emptyset^\gamma$

Jawab :
Bilangan terbesar adalah antara pilihan a dan b

Untuk mencari mana dari kedua itu yang terbesar, karena kita tidak dibolehkan menggunakan alat hitung dalam bentuk apapun, menurut saya coba kita gunakan logaritma natural (ln)

Perhatikan rumus berikut

- ln x = 2, 303 log x
- log x = 0,4343 ln x

Dan juga anda harus ingat log 2 = 0, 3010 , log 3 = 0, 4771 , log 4 = 2. log 2 = 0, 6020 ,serta sifat ln sama dengan sifat pada logaritma, misalkan

$x_1 = \pi^e$ $\quad\quad\quad\quad$ $x_2 = e^\pi$

ln x_1 = ln π^e $\quad\quad\quad\quad$ ln x_2 = ln e^π

ln x_1 = e . ln π $\quad\quad\quad\quad$ ln x_2 = π.ln e

ln x_2 = π = 3, 141592 (karena ln e = ^{e}log e = 1)

ln x_1 = 2,718282. ln (3,141592) = 2,718282. (2,303) log (3,141592)

dengan memperkirakan log (3,141592) berada pada interval log 3 < log (3,141592) < log 4

yaitu 0, 4771 < log (3,141592) < 0, 6020

Kalau kita ambil perkiraan log (3,141592) ≈ 0, 5

maka ln x_1 = 2,718282. (2,303) log (3,141592) = 2,718282. (2,303) . (0, 5) = 3, 130101

Dari uraian di atas diperoleh bahwa ln x_1 < ln x_2

Jadi nilai terbesar adalah e^π (**B**)

120. (OMITS 2012)

Jika bilangan pecahan $\frac{2012}{619}$ dinyatakan dalam bentuk pecahan berulang (continued fraction) adalah

$$\frac{2012}{619} = A_0 + \cfrac{A_1}{A_2 + \cfrac{A_3}{A_4 + \cfrac{A_5}{\dots + \cfrac{A_{2011}}{A_{2012}}}}}$$

dan $A_{2k+1} = ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$, dengan $k \in$ bulat positif, maka nilai dari $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{2012}$ adalah…

Jawab : ingat bahwa

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad ,$$

sehingga $A_{2k+1} = \ln e = 1$. Dan untuk $\frac{2012}{619}$ dapat dibentuk menjadi

$$\frac{2012}{619} = A_0 + \cfrac{A_1}{A_2 + \cfrac{A_3}{A_4 + \cfrac{A_5}{\dots + \cfrac{A_{2011}}{A_{2012}}}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2012}{619} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{154}}}$$

Dari hasil di atas jelas bahwa
$A_0 = A_2 = 3, A_4 = 1, A_6 = 154\ dan\ \ A_8 = A_{10} = A_{12} = \cdots = A_{2012} = 0$ sedangkan
$A_1 = A_3 = A_5 = A_7 = \cdots = A_{2011} = 1$
Jadi nilai $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{2012} = 1167$.

B. TEORI BILANGAN (NUMBER THEORY)

121. (OMITS 2012)
Di suatu pagi yang cerah, Meyta mencari banyaknya bilangan komposit dua digit yang habis dibagi digit-digitnya. Berapa banyak bilangan yang akan didapatkan oleh Meyta?

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

122. (OMITS 2012)
Tentukan banyaknya bilangan positif n yang tidak lebih dari 2012 dan memenuhi kondisi $(n.2^n)+1$ habis dibagi 3?

Jawab :
n = 1 $\Longrightarrow (1.2^1)+1=3$ (memenuhi)
n = 2 $\Longrightarrow (2.2^2)+1=9$ (memenuhi)
n = 3 cek sendiri
n = 4 cek sendiri
n = 5 cek sendiri
n = 6 cek sendiri
n = 7 $\Longrightarrow (7.2^7)+1=897$ memenuhi karena 8 + 9 + 7 = 24 kelipatan 3 (ingat keterbagian suatu bilangan dengan angka 3)
n = 8 $\Longrightarrow (8.2^8)+1=2049$ tidak memenuhi karena 2049 > 2012
yang memenuhi yaitu saat n = 1, 2, 7 jadi ada 3 bilangan

123. (PORSEMA NU 2012)
Angka terakhir bila P = 1! + 2! + 3! + . . . + 2012! adalah. …

Jawab :
ingat bahwa n! = 1 x 2 x 3 x 4 x . . . x (n-2) x (n-1) x n
Untuk 1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
51 = 120
6! = 720
7! = ……0 , dst selalu berakhir dengan angka nol
Sehingga 1! + 2! + 3! + . . . + 2012! = 1 + 2 + 6 + 24 +120 + 720 + ……0 = ………3
Jadi jawaban akhirnya adalah berangka terakhir 3

124. Angka terakhir bila Q = 1.1!+2.2!+3.3!+4.4!+ . . . + 2013.2013! adalah…

Jawab :
Perhatikan bahwa
1.1!=1
2.2!=2.2=4
3.3!=3.6=18
4.4!=4.24=96
5.5!=5.120=600
6.6!=6.720=4320
7.7!=..............0
dst
2013.3013!=.........0
___________________ +
............................9
Jadi angka terakhir untuk Q = 1.1!+2.2!+3.3!+4.4!+ . . . + 2013.2013! adalah 9

125. Jika R = 1.1!+2.2!+3.3!+4.4!+ . . . + 1006.1006!. berapakah sisa pembagian R oleh 2014?

Jawab :
perhatikan bahwa

$(n+1)! = n!.(n+1)$

$(n+1)! = n.n! - n!$

$n.n! = (n+1)! - n!$

Sehingga soal di atas dapat di sederhanakan menjadi

1.1!+2.2!+3.3!+4.4!+ . . . + 1006.1006!

$= (2!-1!) + (3!-2!) + (4!-3!) + (5!-4!) + \cdots + (1007!-1006!)$

$= 1007! - 1!$

maka sisa pembagian R oleh 2014 adalah

$\equiv\ 1007! - 1!\, mod\ 2014$ (ingat bahwa 1007!=1.2….1003.1004…1006.1007. mengandung 2014 saat 2 x 1007)

$\equiv 0 - 1\ mod\ 2014$

$\equiv 2014 - 1\ mod\ 2014$ (ingat kondisi 2014=0 saat modulo 2014)

$\equiv 2013\ mod\ 2014$

jadi sisa pembagian 1.1!+2.2!+3.3!+4.4!+ . . . + 1006.1006! oleh 2014 akan bersisa 2013

126. (OMITS 2012)

Di sebuah perpustakaan terdapat beberapa orang yang suka membaca buku. Pada hari Selasa 31 Januari 2012 terdapat 5 orang ke perpustakaan meminjam buku, mereka adalah Puput, Nadia, Dina, Dika dan Aulia. jika Puput datang untuk datang ke perpustakaan tiap 2 hari sekali, Nadia 3 hari sekali, Dina tiap 5 hari sekali, Dika tiap 7 hari sekali dan Aulia setiap 11 hari sekali, maka mereka berlima akan meminjam buku secara bersama-sama lagi pada hari Selasa tanggal …

Jawab :

Gunakan KPK untuk soal di atas

Jika tidak pada tahun kabisat misal 2013, 2014, 2015, 2017, 2018 dst, maka

Januari 31 hari	Juli 31 hari
Februari 28 hari	Agustus 31 hari
Maret 31 hari	September 30 hari
April 30 hari	Oktober 31 hari
Mei 31 hari	Nopember 30 hari
Juni 30 hari	Desember 31 hari

____ +

sehingga jumlah hari dalam 1 tahun = 365 hari

Jika pada tahun kabisat maka maka jumlah hari dalam 1 tahun = 366 hari

Sehingga KPK dari 2, 3, 5, 7, 11 adalah = 2310

Perhatikan untuk tahun

2012	2013	2014	2015	2016	2017	januari 2018	Februar*1*	Maret	April	Mei
335 hari	*365*	*365*	*365*	*366*	*365*	*31*	*28*	*31*	*30*	*29*

= 2310

Jadi mereka bersama-sama lagi pada 29 Mei 2018

127. Nilai x terbesar jika 9^x membagi 33^{66} adalah

Jawab :

Perhatikan

$33^{33} = (3.11)^{33} = 3^{33}.11^{33} = 3^{32+1}.11^{33} = 3^{32}.3.11^{33} = 3^{2.16}.3.11^{33} =$

$9^{16}.3.11^{11}$

Karena 33^{66} habis di bagi 9^x, maka nilai x adalah 16

Jadi x terbesar saat 9^x membagi 33^{66} adalah 16.

128. (OMITS 2012)

Jika a dan b adalah bilangan bulat yang memenuhi

$12a^2b^2 + 28b^2 - 108 = 3(a^2 + 2012)$.

Nilai $\frac{a^b}{b^a}$ adalah ...

a. $\frac{64}{81}$ b. $\frac{125}{243}$ c. $\frac{512}{81}$ d. $\frac{343}{128}$ e. 4

Jawab :
$12a^2b^2 + 28b^2 - 108 - 3a^2 - 6036 = 0$

$12a^2b^2 - 3a^2 + 28b^2 - 6144 = 0$

$(12a^2b^2 - 3a^2 + 28b^2 - 7) - 6137 = 0$ (tujuannya untuk memfaktorkan saja)

$(3a^2 + 7)(4b^2 - 1) = 6137$ (faktor 6137=1,17,19,323,361,6137)

Selanjutnya kita misalkan

- Untuk $3a^2 + 7 = 6137$ dan $4b^2 - 1 = 1$, jelas tidak memenuhi lihat saja kondisi b demikian juga untuk a
- Untuk $3a^2 + 7 = 361$ dan $4b^2 - 1 = 17$, baik a maupun b juga tidak memenuhi
- Untuk $3a^2 + 7 = 323$ dan $4b^2 - 1 = 19$, baik a maupun b juga tidak memenuhi
- Untuk $3a^2 + 7 = 19$ dan $4b^2 - 1 = 323$,keduanya memenuhi, dengan $3a^2 = 12 \Longrightarrow a^2 = 4 \Longrightarrow a = \sqrt{4} = |2| = \pm 2$, demikian juga yang $4b^2 = 324 \Longrightarrow b^2 = 81 \Longrightarrow b = \sqrt{81} = |9| = \pm 9$

Sehingga kalau kita substitusikan ke pertanyaan soal dengan memilih $a = 2 \text{ dan } b = 9$ akan ketemu $\frac{a^b}{b^a} = \frac{2^9}{9^2} = \frac{512}{81}$

Jadi jawaban untuk soal di atas adalah C

129. (AIME 1987/OSP 2008)
Jika m dan n adalah bilangan bulat yang memenuhi $m^2 + 3m^2n^2 = 30n^2 + 517$.

Tentukan nilai untuk $3m^2n^2$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

130. Tentukan digit terakhir dari 777^{333}

Jawab :
Digit terkakir 777^{333} = sisa pembagian 777^{333} oleh 10

$777^{333}\ mod\ 10\ \equiv (770+7)^{4x83+1}\ mod\ 10$

$777^{333}\ mod\ 10\ \equiv (7)^{4x83+1}\ mod\ 10$

$777^{333}\ mod\ 10\ \equiv (2401)^{83}.7\ mod\ 10$

$777^{333}\ mod\ 10\ \equiv 1.7\ mod\ 10$

$777^{333}\ mod\ 10\ \equiv 7\ mod\ 10$

Jadi digit terakhirnya jika 777^{333} dibagi 10 adalah 7

131. Tentukan digit dua terakhir untuk 777^{333}

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

132. Tentukan pula dua digit terakhir untuk 3^{1234}

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

133. (OMITS 2012)
Tentukan digit terakhir dari

$$2012^{2011^{2010^{2009}}}+2013^{2012^{2011^{2010}}}+2014^{2013^{2012^{2011}}}+2015^{2014^{2013^{2012}}}$$

Jawab :
Untuk mengetahui angka satuan, perhatikan table berikut

Angka satuan	Pangkat 1	Pangkat 2	Pangkat 3	Pangkat 4	Pangkat 5
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	6	2
3	3	9	7	1	3
4	4	6	4	6	4
5	5	5	5	5	5
9	9	1	9	1	9

Selanjutnya kita tinggal melihat digit terakhir pada setiap bilangan

Sebagai contohnya, untuk 2010^{2009} anggap saja $\ldots 0^{\cdots 9}$, nol pangkat sembilan lihat table tetap tetap berakhir dengan nol juga. Selanjutnya untuk $2011^{2010^{2009}}$,

anggap saja 2011 berpangkat …0, maka hasilnya adalah sebuah bilangan yang berakhiran dengan digit 1. Sehingga $2012^{2011^{2010^{2009}}}$ sama saja $2012^{\cdots 1}$, ini akan menghasilkan sebuah bilangan dengan digit terakir adalah 2.

Maka selanjutnya dapat kita susun sebagai berikut :

$2012^{2011^{2010^{2009}}}$ akan berakhiran dengan digit 2

$2013^{2012^{2011^{2010}}}$ akan berakhiran dengan digit 9

$2014^{2013^{2012^{2011}}}$ akan berakhiran dengan digit 4

$2015^{2014^{2013^{2012}}}$ akan berakhiran dengan digit 5

Kalau kita jumlahkan semua = 2 + 9 + 4 + 5 = 20
Jadi,

$$2012^{2011^{2010^{2009}}} + 2013^{2012^{2011^{2010}}} + 2014^{2013^{2012^{2011}}} + 2015^{2014^{2013^{2012}}}$$

akan berakhiran denga digit 0.

134. Tentukan sisa pembagian 3^{2012} jika dibagi 41!

Jawab :

$3^{2012} \text{ mod } 41 \equiv 3^{4x503} \text{ mod } 41$

$\equiv (3^4)^{503} \text{ mod } 41$

$\equiv (2x41 - 1)^{503} \text{ mod } 41$

$\equiv (-1)^{503} \text{ mod } 41$

$\equiv -1 \text{ mod } 41$

$\equiv (41 - 1) \text{ mod } 41$

$\equiv 40 \text{ mod } 41$

Jadi sisa 3^{2012} dibagi oleh 41 adalah 40.

135. Tentukan sisa pembagian $43^{43^{43}}$ oleh 100?

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

136. Tunjukkan bahwa 7 membagi habis $3^{105} + 4^{105}$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

137. Tunjukkan bahwa 7 juga membagi habis $2222^{5555} + 5555^{2222}$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

138. Untuk 8^5 x 5^{16} ,tentukan banyak angkanya?

Jawab :
8^5 x 5^{16} = $(2^3)^5$ x 5^{16} = 2^{15} x 5^{16} = 2^{15} x 5^{15+1} = 2^{15} x 5^{15} x 5^1 = 10^{15} x 5^1

Sehingga banyaknya angka dari 8^5 x 5^{16} = 16 angka

139. Tentukan banyaknya angka 4^{16} x 5^{25}?

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

140. Tunjukkan bahwa
$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \ \dots + \frac{1}{478} + \frac{1}{479} - \frac{2}{480}$, habis dibagi 641!

Jawab :

$$\frac{p}{q} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \dots + \frac{1}{480}\right) - 3(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \ \dots + \frac{1}{480})$$

$$\frac{p}{q} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \dots + \frac{1}{480}\right) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ \dots + \frac{1}{160})$$

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{1}{161} + \frac{1}{162} + \frac{1}{163} + \ \dots + \frac{1}{480}\right)$$

$$\frac{p}{q} = (\frac{1}{161} + \frac{1}{480}) + \left(\frac{1}{162} + \frac{1}{479}\right) + \cdots + (\frac{1}{320} + \frac{1}{321})$$

$$\frac{p}{q} = 641\{\left(\frac{1}{161.480}\right) + \left(\frac{1}{162.479}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{320.321}\right)\}$$

$$p = 641q\{\left(\frac{1}{161.480}\right) + \left(\frac{1}{162.479}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{320.321}\right)\}$$

Dari bentuk p terakhir menunjukkan bahwa p habis dibagi oleh 641.

141. Jika a dan b relatif prima dan

$$\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2$$

Tentukan $\frac{a}{b}$

Jawab :

Pembahasan diserahkan kepada pembaca

142. Perhatikan susunan bilangan berikut!

$$6^2 - 5^2 = 11$$

$$56^2 - 45^2 = 1111$$

$$556^2 - 445^2 = 111111$$

$$5556^2 - 4445^2 = 111111$$

. .
. .
. .

Buatlah generalisasinya dan buktikan!

Jawab :
Susunan bilangan tersebut di atas adalah variasi dari $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$6^2 - 5^2 = 11$$

$$56^2 - 45^2 = 1111$$

$$556^2 - 445^2 = 111111$$

$$5556^2 - 4445^2 = 111111$$

. .
. .

$$(55\ldots56)^2 - (44..45)^2 = \left(\underbrace{111\ldots1}_{n+1}\right)\left(\underbrace{100\ldots1}_{n}\right)$$

Silahkan cek

143. (OMITS 2012)
Banyaknya bilangan yang tidak lebih dari 2012 dan jika dibagi dengan 2, 3, 4, 5, dan 7 akan bersisa 1 adalah …

Jawab :
Misalkan bilangan itu X, maka
$a_1 : X \equiv 1\ (mod\ \ 2\ )$
$a_2 : X \equiv 1\ (mod\ 3\ )$
$a_3 : X \equiv 1\ (mod\ 4\ )$
$a_4 : X \equiv 1\ (mod\ 5\ )$
$a_5 : X \equiv 1\ (mod\ 7\ )$
Sehingga $X_k = 420k + 1$, dengan $k \epsilon\ bilangan\ Asli$ dan kalua yang diinginkan ≤ 2012,
maka bilangan itu adalah :
X_1 = 421
X_2 = 841

X_3 = 1261
X_4 = 1681
X_5 = 2101 ——> tidak memenuhi
Jadi ada 4 bilangan
Lihat *Chinese Remainder Theorem*

144. Tentukan semua solusi bilangan bulat x, y pada persamaan $2x + 12y = 99$

Jawab :
Soal di atas berkaitan dengan **persamaan Diophantine**
Perhatikan ruas kiri, $3x + 9y$ adalah bilangan yang habis dibagi 2 dan ruas kanan adalah 99 adalah bilangan yang tidak habis dibagi 2
Jadi tidak ada penyelesaian

145. Tentukan semua solusi bilangan bulat x, y pada persamaan $2x + 12y = 100$

Jawab :
Jelas bahwa ruas kiri-kanan habis dibagi 2, sehingga
$2x + 12y = 100$ dibagi 2 menjadi

$x + 6y = 50 \Rightarrow x = 50 - 6y$

Sehingga diperoleh nilai y banyak sekali, begitu pula dengan x

146. (OMITS 2012)
Pada suatu permainan, STIMO meminta anda untuk memikirkan sebuah bilangan tiga digit ITS, dimana I, T dan S adalah digit-digit basis 10. Kemudian STIMO meminta anda untuk memikirkan bilangan baru dengan bentuk IST, TSI, TIS, STI dan SIT kemudian menjumlahkannya. Jika kelima bilangan baru berjumlah 3194 dan STIMO dapat menebak bilangan yang anda pikirkan di awal tadi, Berapakah bilangan ITS itu?

Jawab :
Sebuah bilangan yang terdiri dari 3 digit(masing-masing berbeda) kalau digitnya dipermutasikan akan berupa 6 bilangan yang masing-masing juga berupa bilangan 3 digit pula.

Dan jumlah hasil permutasi tadi adalah 222 kali dari jumlah salah satu bilangan yang dipermutasikan

Misalkan bilangan itu I, T dan S dan hasil permutasinya ITS, IST, SIT, STI, TIS dan TSI

maka

ITS = 100I + 10 T + S
IST = 100I + 10 S + T
SIT = 100S + 10 I + T
STI = 100S + 10 T + I
TIS = 100T + 10 I + S
TSI = 100T + 10 S + I
_________________________ +
ITS+IST+SIT+STI+TIS+TSI= 100.(2I + 2T + 2S) + 10.(2I + 2T + 2S) + (2I + 2T + 2S)

= 200.(I+T+S) + 20.(I+T+S) + 2.(I+T+S) = 222.(I+T+S)

Pada soal terdapat fakta

222.(I+T+S) – ITS = 3194

Karena ITS dengan I≠T≠S maka dapat dipastikan ITS adalah bilangan genap.

Untuk jumlah digit ITS karena ketiganya berbeda nilai paling tinggi adalah 24(dengan memisalkan I = 7, T = 8 dan S = 9) dan paling rendah bernilai 6

Dengan cara coba-coba kita akan tertuju pada jawaban yang diinginkan.

Misal
- 222 .24 = 5328 ——>tentunya bilangan ini terlalu besar
- 222. 23 = 5106 ——>masih terlalu besar
- 222. 22 = 4884
- 222. 21 = 4662
- 222. 20 = 4440
- 222. 19 = 4218
- 222. 18 = 3996
- 222. 17 = 3774
- 222. 16 = 3552 ——————————————> mungkin
- 222. 15 = 3330 ——> mulai mengecil
- 222. 14 = 3108 ——> tidak mungkin

Ambil 3552, dengan mengambil bilangan bebas yang terdiri 3 digit berbeda dimungkinkan akan ketemu jawabannya
Andai ITS = 358 (jumlahnya = 16)
222 .(3+5+8) – 358 = 3194
Jadi bilangan yang kita pikirkan tadi adalah 358

147. (OMITS 2012)
Jika I, T dan S adalah digit-digit yang memenuhi
IST + TIS + TSI +STI + SIT – 1 = 2012, tentukan bilangan ITS itu?

Jawab :
Perhatikan soal di atas
IST + TIS + TSI +STI + SIT – 1 = 2012
IST + TIS + TSI +STI + SIT = 1 + 2012 = 2013
Perhatikan juga pada pembahasan pada no soal sebelumnya, yaitu
222.(Bilangan yang diinginkan) – ITS = 2013
222.(I+T+S) – ITS = 2013
Misal
222. 10 = 2220 —-> mungkin
Ambil saja 10 = 2 + 1 + 7, sehingga
222. (2 + 1 + 7) – 217 =2013
Jadi ITS = 217

148. (OMITS 2012)
Jika sebuah alfametik BELGIS x 6 = GISBEL
Nilai dari SI + BELGIS + BELI + ES + LEGI =…

Jawab :
Dari soal kita mendapatkan 6 x (BEL x 1000 + GIS) = (GIS x 1000 + BEL)
6000BEL + 6GIS = 1000GIS + BEL
6000BEL – BEL = 1000GIS – 6GIS
5999BEL = 994GIS (masing-masing ruas dibagi dengan 7)
857BEL = 142GIS
Perhatikan bahwa dengan mengamati kesamaan tersebut didapat bahwa BEL = 142 dan GIS =857
6 x 142857 = 857142 ⟺ 6 x BELGIS = GISBEL, maka didapat bahwa:
B = 1, E = 4, L = 2, G = 8, I = 5, S = 7
Sehingga
SI + BELGIS + BELI + ES + LEGI = 75 + 142857 + 1425 + 47 +2485 = 146889

149. Carilah bilangan berikut dengan $A \neq B \neq C \neq D \neq E$ agar digit-digit $4.ABCDE = EDCBA$

Jawab :
Kalau kita perhatikan bilangan 5 digit dikalikan dengan 4 menghasilkan bilangan lima digit pula, maka yang paling mungkin nilai A adalah berupa angka 1 atau 2.

$ABCDE$
4
_______ x
EDCBA
Andai A = 1, maka berakibat E =1 juga, jelas tidak mungkin, misalkan A = 2 akan menghasilkan E = 8, ini mungkin.

Sehingga kalau kita tuliskan kembali

2BCD8
4
_______ x
8DCB2
Selanjutnya kita akan mencari B, C, dan D. Nilai yang mungkin untuk B adalah 1 atau 2, tetapi karena 2 sudah kita gunakan sebut saja demikian, kita ambil B=1. Untuk B=1, ini akan mengakibatkan nilai D = 7,
21C78
4
______ x
87C12
Dari bentuk terakhir sudah terlihat bahwa nilai C yang paling mungkin dengan kondisi ini adalah 9
21978
4
______ x
87912
Jadi digit ABCDE adalah 21978

150. Jika diketahui digit-digit 4.ABCD = DCBA dengan $A \neq B \neq C \neq D$, tentukan semua bilangan yang memenuhi kondisi ini

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

151. Carilah bilangan kuadrat yang memiliki bentuk $xxyy$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

152. Jika p dan q anggota $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ sehingga $p^5 + 1 = q \ x \ 1111$, tentukan p dan q

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

153. (OMITS 2012)
Misalkan ada bilangan

$$A = \underbrace{1.111.111.111.111.111.111}_{bilangan\ 1\ sebanyak\ 19}$$

$$B = \underbrace{11.111.111.111}_{bilangan\ 1\ sebanyak\ 11}$$

Bila x adalah banyaknya faktor positif genap dari A dan y adalah banyaknya faktor positif ganjil dari B, maka nilai $x + y$ adalah …
Jawab :
Perhatikan bahwa
10 – 1 = 9 atau $10 = 10^1 \equiv 1 \ (mod \ 9)$
100 – 1 = 99 atau $100 = 10^2 \equiv 1 \ (mod \ 9)$
1000 – 1 = 999 atau $1000 = 10^3 \equiv 1 \ (mod \ 9)$
10000 – 1 = 9999 atau $10000 = 10^3 \equiv 1 \ (mod \ 9)$
dst
Perhatikan pula
$1 = \left(\frac{10^1-1}{9}\right)$
$11 = \left(\frac{10^2-1}{9}\right)$
$111 = \left(\frac{10^3-1}{9}\right)$
$1111 = \left(\frac{10^4-1}{9}\right)$
dst
Perhatikan juga untuk x adalah banyaknya faktor positif genap dari A, jelas harga x tidak ada sebab tidak mungkin bilangan genap kali bilangan ganjil sama dengan bilangan ganjil.
Untuk 1.111.111.111.111.111.111=$\left(\frac{10^{19}-1}{9}\right)$ atau dapat ditulis sebagai 9.(1.111.111.111.111.111.111)= $10^{19} - 1$. Bentik $10^{19} - 1$ ini jelas bukan bilangan prima(komposit), menurut **teorema fermat** jelas tidak memenuhi dengan kondisi $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \ (mod \ p)$, dengan $p \in$ Bilangan Prima serta a dan p relatif prima, sehingga 1.111.111.111.111.111.111 adalah bilangan prima. Oleh karena itu nilai y ada 2, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri yaitu 1.111.111.111.111.111.111
Jadi $x + y = 0 + 2 = 2$
Perhatikan table berikut :

Bilangan	Faktor	Jenis
11		Prima
111	3.37	Komposit
11111	41.271	Komposit
1111111	239.4649	Komposit
11111111111	21649.513239	Komposit
1111111111111	53.79.265371653	Komposit
11111111111111111	2071723.5363222357	Komposit
1111111111111111111		Prima
11111111111111111111111		Prima
11111111111111111111111111111	3191.16763.43037.62003.778 43839397	Komposit

154. Jika $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x, serta $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil dari atau sama dengan x.
Tentukan nilai untuk

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{5} \right\rceil + \cdots + \left\lfloor \frac{1}{2012} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2013} \right\rceil$$

Jawab :
$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 1$, $\left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor = 1$, $\left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil = 0$, $\left\lceil \frac{1}{5} \right\rceil = 0$ dan seterusnya, maka

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{5} \right\rceil + \cdots + \left\lfloor \frac{1}{2012} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2013} \right\rceil = \underbrace{1 + 0 + 1 + 0 + \cdots + 1 + 0}_{2012} = 1006$$

155. (OMITS 2012)
Pada persamaan fungsi tangga berikut berlaku

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor \sqrt{2012} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\sqrt{2012}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2012} \right\rfloor$$

Jika $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x, maka nilai k yang memenuhi

Jawab :
Untuk ruas kiri $\sqrt{2012} = 44, \ldots$
Sehingga $\lfloor \sqrt{2012} \rfloor = \lfloor 44, \ldots \rfloor = 44$, dan $\sqrt{44} = 6, \ldots$ maka $\lfloor 6, \ldots \rfloor = 6$
Untuk ruas kanan $\left\lfloor \sqrt{\sqrt{2012}} \right\rfloor = 6$
Sehingga

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor \sqrt{2012} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\sqrt{2012}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2012} \right\rfloor$$

$$6 = 6 + \left\lfloor \frac{k}{2012} \right\rfloor$$

$$\left\lfloor \frac{k}{2012} \right\rfloor = 0$$

Maka nila k yang memenuhi adalah $0 \le k < 2012$
Jadi k ada sebanyak 2012, yaitu; 0, 1, 2, 3, …, 2011.

156. (OMITS 2012)
Banyaknya pembagi positif untuk 1005010010005001 adalah …

Jawab :
Untuk mengetahui berapa banyak pembagi positif dari 1005010010005001, maka
1005010010005001 = 1001 x 1001 x 1001 x 1001 x 1001 = 1001^5
$1001^5 = (7.11.13)^5 = 7^5 . 11^5 . 13^5$

Sehingga banyaknya pembagi positifnya adalah = (***5***+1)(***5*** + 1)(***5*** + 1)= 6. 6. 6 = 216

157. (OMITS 2012)
Untuk
(1945 x 1946 x 1947 x … x 2011 x 2012) $/19^q$
adalah bilangan bulat, maka harga q adalah…

Jawab :
kurangkan saja 2012 dengan bilangan bulat sebelum 1945
2012 – 1944 = 68
Kemudian hasilnya kita bagi dengan 19 dan hasilnya dibulatkan
68/19 ≈ 3,5789
Jadi q = 4

158. (OMITS 2012)
Jumlah untuk semua bilangan bulat n yang memenuhi n! memiliki 2012 angka nol di bagian belakang pada representasi desimalnya adalah …

Jawab :
Untuk mengetahui jumlah angka nol dibagian belakang pada representasi desimal suatu bilangan gunakan rumus $[\frac{n}{5^m}]$ dengan $m \subset \{1, 2, 3, \dots\}$
Gunakan cara coba-coba
Misalkan n = 8000

- [8000/5] = 1600
- [8000/25] = 320
- [8000/125] = 64
- [8000/625] = 12,8 tidak dibulatkan, jadi = 12
- [8000/3125] = 2, 56 jadi = 2

______________________________ +

1998

Untuk n = 8060

- [8060/5] = 1612
- [8060/25] = 322,4 jadi = 322
- [8060/125] = 64, 48 jadi = 64
- [8060/625] = 12, 896 jadi = 12
- [8060/3125] = 2, 5792 jadi = 2

______________________________ +

2012 tepat

Karena 8060/5 = 1612 tepat tanpa sisa, maka akan ada 4 bilangan sisa lagi diatasnya(karena dibagi 5, setiap representasi nol dari n! akan diperoleh dari 5 bilangan berurutan), yaitu 8061, 8062, 8063 dan 8064

Jadi totalnya ada 8060 + 8061 + 8062 + 8063 + 8064 = 40310

159. Tentukan banyaknya nol dari 1000! di bagian belakang pada representasi desimalnya

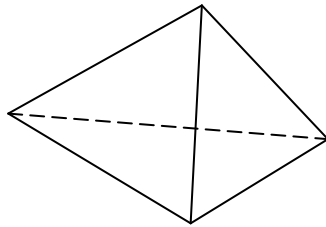
Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

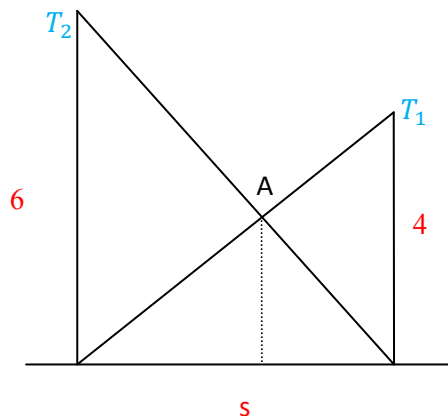
C. GEOMETRI (GEOMETRY)

160. (OMITS 2012)
Jarak terdekat untuk titik (M, T) dengan garis Ox + Iy + S adalah …

Jawab :
Jarak terdekatnya adalah $\frac{OM+IT+S}{\sqrt{O^2+I^2}}$

161. Bila anda memiliki 6 batang korek api, bagaimana anda menyusun ke enam batang korek api itu menjadi 4 buah segitiga yang sama sisi?

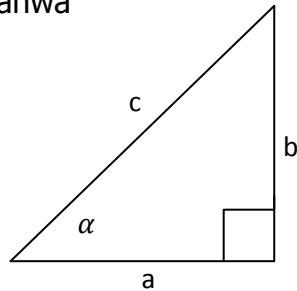
Jawab :
Untuk menjawab soal yang satu ini, coba anda perhatikan gambar berikut

Sehingga, ke-6 batang korek api tersebut akan membentuk bangun limas dengan sisi berupa segitiga sama sisi

162. Jika T_1 dan T_2 adalah dua tiang vertikal yang berjarak s satuan. Bila kedua ujung tali tersebut diikat seutas tali ke bawah, lihat gambar di bawah. Jika A adalah titik potong kedua tali, tentukan jarak A ke tanah dengan asumsi posisi permukaan tanah horizontal?

Jawab :
Kita dapat mencari dengan menganggap titik A adalah perpotongan dua garis yang melalui T_1 dan T_2 dengan tanah (bagian horizontal kita anggap sumbu X)
Sehingga akan ketemu jarak titik A ke tanah, yaitu

$t_A = \frac{(T_1)(T_2)}{(T_1)+(T_2)} = \frac{6.4}{6+4} = \frac{24}{10} = 2{,}4$ m

Jadi tinggi titik A ke tanah adalah 2,4 meter.

163. Buktikan bahwa

Jika

$\mathrm{a}\cos x + b\sin x = c$, maka $\cos(x-\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$

Jawab :

$a\cos x + b\sin x = c$

$\cos x + \frac{b}{a}\sin x = \frac{c}{a}$ (masing-masing ruas dibagi dengan a)

$\cos x + \tan x\,.\sin x = \frac{c}{a}$

$\cos x.\cos x + \tan x.\sin x.\cos x = \frac{c}{a}\cos x$

$\cos x.\cos x + \sin x.\sin x = \frac{c}{a}\cos x$

$\cos(x-\alpha) = \frac{c}{a}\cos x$ (terbukti)

164. Buktikan bahwa pada ΔABC

Berlaku $\boldsymbol{c = a\cos\beta + b\cos\alpha}$

Jawab :

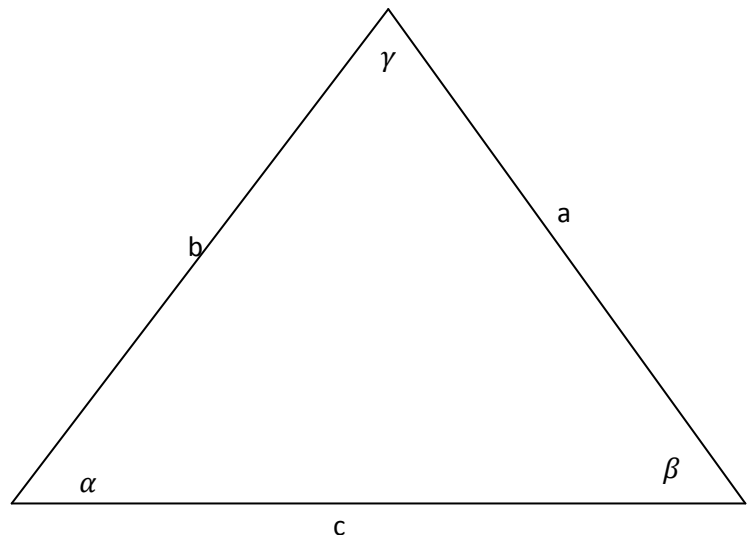
Dengan aturan $sinus$ diperoleh :

$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$

maka

$c\,.\sin\alpha = a\,.\sin\gamma$

$\Leftrightarrow c\,.\sin\alpha = a\,.\sin\left(180^0 - (\alpha+\beta)\right)$

$\Leftrightarrow c\,.\sin\alpha = a\,.\sin(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow c\,.\sin\alpha = a\,.(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$

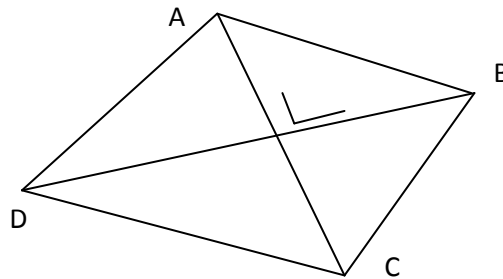
$\Leftrightarrow c\,.\sin\alpha = a\sin\alpha\cos\beta + a.\cos\alpha\sin\beta$

$\Leftrightarrow c \ = \frac{a\,.\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha} + \frac{a.\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}$

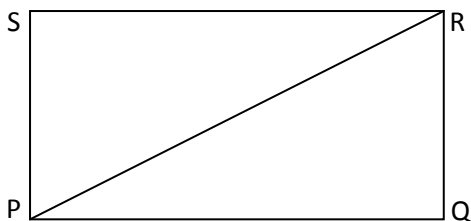
$\Leftrightarrow c \ = a.\cos\beta + \frac{a}{\sin\alpha}.\sin\beta\cos\alpha \rightarrow \text{ingat } \left(\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Leftrightarrow b = \sin\beta.\frac{a}{\sin\alpha}\right)$

Sehingga diperoleh

$\boldsymbol{c = a\cos\beta + b\cos\alpha}$ (terbukti)

165. Pada sebuah segi empat ABCD diagonalnya berpotongan di E. Jika luas segitiga ABE 6 satuan luas dan luas segitiga CDE 24 satuan luas serta luas segitiga DAE sama dengan luas segitiga BCE, maka luas segitiga DAE adalah …

Jawab :
Diketahui luas segita DAE dan segitiga BCE adalah sama, luas segitiga CDE 24 satuan luas dan luas segitiga ABE adalah 6 satuan luas.

166. (OMITS 2012)
Jika PQRS adalah segiempat yang mempunyai luas *L* dan *PQ + QS + RS* = 16, supaya L maksimum maka nilai dari *PR* adalah… .

Jawab :
Segiempat PQRS anggap saja persegi pajang

Perhatikan gambar di atas adalah sebuah persegi panjang, sehingga memiliki sifat

- PQ // SR dan PQ = SR

- PS // QR dan PS = QR
- PR adalah diagonal dan PR = QS
- Dari soal, PQ + QS + RS = 16 $\Longrightarrow$ 2PQ + QS =16 $\Longrightarrow$ 2PQ + PR = 16,

sehingga mengakibatkan PR = 16 – 2PQ

- Lihat ΔPQR, $QR = \sqrt{PR^2 - PQ^2}$

Ditanyakan Luas supaya maksimum, maka PR=…?

Luas PQRS = PQ x QR

Luas PQRS = PQ x $\sqrt{PR^2 - PQ^2}$

Luas PQRS = PQ x $\sqrt{(16 - 2PQ)^2 - PQ^2}$ = PQ x $\sqrt{4PQ^2 - 64PQ + 256 - PQ^2}$

= PQ x $\sqrt{3PQ^2 - 64PQ + 256}$ = $\sqrt{3PQ^4 - 64PQ^3 + 256PQ^2}$

Sehingga luas PQRS = L = $\sqrt{3PQ^4 - 64PQ^3 + 256PQ^2}$ = $(3PQ^4 - 64PQ^3 + 256PQ^2)^{\frac{1}{2}}$

Supaya luas PQRS maksimum, maka L’ = 0, sehingga

$\frac{1}{2}.(3PQ^4 - 64PQ^3 + 256PQ^2)^{-\frac{1}{2}}.(12PQ^3 - 192PQ^2 + 512PQ) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(12PQ^3 - 192PQ^2 + 512PQ)}{2\left((3PQ^4 - 64PQ^3 + 256PQ^2)^{\frac{1}{2}}\right)} = 0$

$\Leftrightarrow \left(12PQ^3 - 192PQ^2 + 512PQ\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3PQ^2 - 48PQ + 128 = 0$ (masing-masing ruas dibagi dengan 4PQ)

Dengan menggunakan rumus ABC untuk persamaan kuadrat dalam peubah PQ di atas, maka akan kita peroleh

$PQ = 8 \pm \frac{8}{3}\sqrt{3}$ dan

PR = 16 – 2PQ

PR = 16 – 2$\left(8 \pm \frac{8}{3}\sqrt{3}\right)$

PR = 16 – 16 $\pm \frac{8}{3}\sqrt{3}$

PR = $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

Jadi panjang PR supaya luas PQRS maksimum adalah $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ satuan panjang

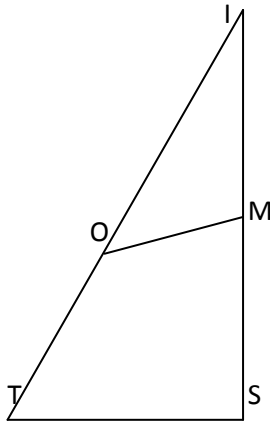
167. (OMITS 2012)

Jika diketahui Sebuah balok KLMN.OPQR yang didalamnya terdapat bidang empat Q.LMN. Jika LN = i, LO = t, dan NO = s, volume balok tersebut dalam I, t, dan s adalah… .

Jawab :
Silahkan anda coba sendiri

168. (OMITS 2012)

Pada segitiga ITS, diketahui TS = 5, IS = 12 dan IT = 13 dengan titik O dan M berturut-turut terletak pada IT dan IS sedemikian hingga OM membagi segitiga ITS menjadi dua bagian yang sama luas. Tentukan panjang minimum untuk OM?

Jawab :
Perhatikan gambar berikut,

Anggap ΔITS seperti tampak pada gambar di atas, dengan IT = 13, IS = 12, dan TS = 5, jelas ΔITS adalah segitiga siku-siku serta OM membagi ΔITS menjadi 2 bagian yang sama luas.

Luas ΔIOM = $\frac{1}{2}$.Luas ΔITS= $\frac{1}{2}$. alas(TS). tinggi(IS) = $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$. 5 . 12 = 15 Satuan luas

Luas ΔIOM = $\frac{1}{2}$.IO.IM.sin <OIM = $\frac{1}{2}$.IO.IM.$\frac{5}{13}$ = 15 <=> IO.IM = 6.13 = 78

Untuk mencari OM kita gunakan aturan cosinus,

$$OM^2 = IO^2 + IM^2 - 2.IO.IM.cos < OIM$$

$$OM^2 = IO^2 + IM^2 - 2.(6.13).\left(\frac{12}{13}\right)$$

Dengan menggunakan ketaksamaan AM-GM akan diperoleh

$$OM^2 \geq IO^2 + IM^2 - 2.(6.13).\left(\frac{12}{13}\right)$$

OM^2 ≥ 2. IO.IM – 2. (6.13). $\left(\frac{12}{13}\right)$

OM^2≥2. IO.IM – 144

OM^2≥2. 78 – 144

OM^2≥ 156 – 144

OM^2≥ 12

OM ≥ $\sqrt{12}$

OM ≥ $2\sqrt{3}$

Jadi panjang minimum OM adalah $2\sqrt{3}$

169. Jika ada tiga bangun datar beraturan yaitu; segitiga sama sisi, persegi dan segi-6 beraturan mempunyai keliling yang sama maka luas terbesar adalah bangun?

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

170. (OMITS 2012)
Jika $x = \sqrt[n]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$ dan *tan* θ = $\frac{1}{6}.\left(x^n + x^{-n}\right)$ dengan 0 ≤ θ ≤ 2π,
maka nilai θ_1 + θ_2 adalah. …

Jawab :
$x^n = \left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n$ = $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^1$ = $\sqrt{3}+\sqrt{2}$
$x^n = \left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{-n}$ = $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}$ = $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (untuk yang ini anda rasionalkan)
tan θ = $\frac{1}{6}.\left(x^n + x^{-n}\right)$ = 1/6. [$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ + $\sqrt{3}-\sqrt{2}$] = $\frac{1}{6}\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
tan θ = $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, dengan 0 ≤ θ ≤ 2π
tan θ = tan 30^0
$\theta = 30^0 + k.180^0$
Untuk k = 0 $\Rightarrow \theta_1 = 30^0 + 0.180^0 = 30^0$ (mm=memenuhi)
Untuk k = 1 $\Rightarrow \theta_2 = 30^0 + 1.180^0 = 210^0$ (mm)
Untuk k = 2 $\Rightarrow \theta_3 = 30^0 + 2.180^0 = 390^0$ (tidak mm)
Sehingga θ_1 + θ_2 $= 30^0 + 210^0 = 240^0$

171. (OMITS 2012)

Sebuah persamaan trigonometri

$\sqrt{\frac{2(\tan 2\theta - \tan\theta)}{\tan 2\theta}} = \sqrt{i} + \sqrt{-i}$

dengan $i = \sqrt{-1}$

Jika 0 ≤ θ ≤ 2π dan θ_1 ≥ θ_2, maka harga dari cot θ_1 – csc θ_2 adalah …

Jawab :

Untuk

$\sqrt{\frac{2(\tan 2\theta - \tan\theta)}{\tan 2\theta}} = \sqrt{i} + \sqrt{-i}$ kuadratkan masing-masing ruas, maka akan kita dapatkan

$\frac{2(\tan 2\theta - \tan\theta)}{\tan 2\theta} = i + (-i) + 2\sqrt{-i^2}$ (ingat bahwa: $\sqrt{-i^2} = \sqrt{-(-1)} = \sqrt{1} = 1$)

$\frac{2(\tan 2\theta - \tan\theta)}{\tan 2\theta}$ = 2

2 (tan 2 θ – tan θ) = 2 tan 2 θ

2tan 2 θ -2 tan θ = 2 tan 2 θ

tan θ = 0, dengan menggunakan persamaan untuk rumus tangen akan didapatkan

θ = 0 + $k.\pi$ = $k.\pi$

untuk k = 0 ===> θ_1 = 0

untuk k = 1 ===> θ_2 = π

untuk k = 2 ===> θ_3 = 2 π

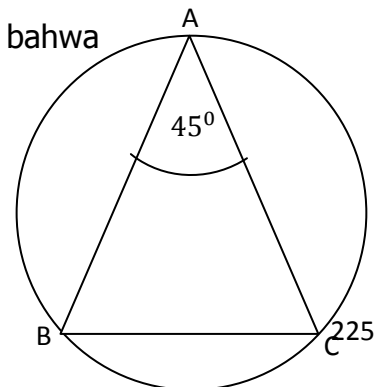
Dari soal Jika θ_1 ≥ θ_2, ambil θ_1 = 2 π dan θ_2 = π

Sehingga cot 2 π – cosec π = cot 360^0 – cosec 180^0 = ∞ – ∞

Jadi sebagai kesimpulannya dengan melihat hasilnya adalah cot 2 π – cosec π = cot 360^0 – cosec 180^0 = tidak didefinisikan untuk hasil pengurangan dari 2 bilangan ini.

172. Perhatikan gambar berikut di samping, buktikan bahwa
Jika BC = a , buktikan bahwa

$$AB = AC = \frac{a}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Bukti :

Misalkan $AB = AC = x$

Dengan menggunakan aturan cosinus, maka panjang $BC = a$ adalah

$a^2 = x^2 + x^2 - 2.x.x.\cos 45^0$

$a^2 = 2x^2 - 2x^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$a^2 = 2x^2 - x^2\sqrt{2}$

$a^2 = x^2\left(2-\sqrt{2}\right)$,masing-masing ruas kalikan dengan $(2+\sqrt{2})$ maka

$a^2\left(2+\sqrt{2}\right) = x^2(4-2)$

$2x^2 = a^2\left(2+\sqrt{2}\right)$

$4x^2 = a^2\left(4+2\sqrt{2}\right)$

$x^2 = \frac{a^2}{4}\left(4+2\sqrt{2}\right)$

$x = \frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, sehingga

$AB = AC = \frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ terbukti

173. Tentukan nilai eksak dari $\sin 36^0$

Jawab :

Misalkan $\Delta\mathrm{ABC}$ sama kaki dengan $< A = 36^0$, $< B = < C = 72^0$, $\mathrm{AD} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = 1, \mathrm{AC} = \mathrm{x}$ serta CD adalah $garis\ bagi$.

Perhatikan bahwa

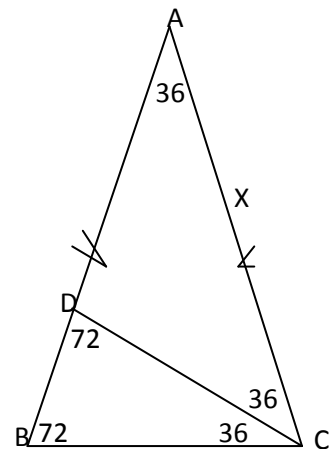
$\Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{BCD}$, sehingga didapat $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB-AD} \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB-BC}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

Untuk $= AB = AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, hal ini berakibat

$\frac{AB}{BC} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .... (1)

Dengan aturan $sinus$ didapatkan ,

$\frac{AB}{\sin <C} = \frac{BC}{\sin <A} \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{\sin <C}{\sin <A} = \frac{\sin 72^0}{\sin 36^0} = \frac{2\sin 36^0 \cos 36^0}{\sin 36^0} = 2\cos 36^0$.

Sehingga $\frac{AB}{BC} = 2\cos 36^0$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) berakibat

$2\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Dengan menggunakan rumus identitas trigonometri akan didapatkan

$$sin^2 36^0 + cos^2 36^0 = 1 \Leftrightarrow sin^2 36^0 = 1 - cos^2 36^0 = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right) = 1 - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

Jadi , $\sin 36^0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

174. Tentukan nilai eksak $\sin 18^0$, $\cos 18^0$, $\cos 36^0$, $\sin 54^0$, $\cos 54^0$, $\sin 72^0$ dan $\cos 72^0$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

175. Segitiga ABC memiliki panjang sisi $BC = a$, $AC = b$, dan $AB = c$. Jika $= \frac{a+b+c}{2}$, buktikan bahwa

$$\cos\frac{< BAC}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

Jawab :
Misalkan $< BAC = \alpha$. Berdasarkan aturan cosinus dan rumus trigonometri untuk sudut rangkap , kita mendapatkan

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$2cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$2cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 1$

$2cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{2bc}{2bc}$

$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{4bc}$

$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$

$cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$

$cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(2s)(2s-2a)}{4bc}$

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ (terbukti)

Silahkan pembaca buktikan (masih berkaitan dalam bahasan di atas , kecuali yang telah di buktikan) dengan

$\alpha=<BAC\,,\beta=<ABC\,,\gamma=<BCA$, dan $r=$ jari – jari lingkaran dalam ΔABC

bahwa

- $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$, $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}$
- $\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$, $\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$, $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{s-b}$
- $\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$, $\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$, $\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s-c}$

176. (PUMaC 2006)

Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $a=7, b=8, c=5$. tentukan nilai dari

$(\sin A+\sin B+\sin C\,).(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2})$?

Jawab :

Soal di atas menuntut kita untuk tahu beberapa kesamaan identitas trigonometri di antaranya sebagai berikut :

Untuk $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, maka ;

- $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$
- $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$
- $\cot\frac{1}{2}\alpha+\cot\frac{1}{2}\beta+\cot\frac{1}{2}\gamma=\cot\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta\cot\frac{1}{2}\gamma$.

(Untuk ketiga identitas di atas silahkan buktikan sendiri)

Sehingga soal di atas dapat dituliskan kembali,

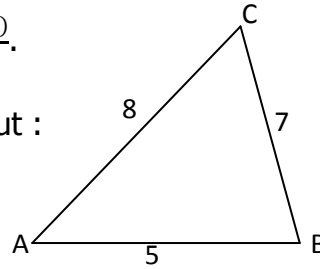
$(\sin A+\sin B+\sin C\,).(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2})$

$=\left(4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C\right).\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}.\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right)=\left(\frac{4cos^2\frac{A}{2}.cos^2\frac{B}{2}.cos^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right)$

Ingat bahwa $cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$, maka

$$\left(\frac{4cos^2\frac{A}{2}.cos^2\frac{B}{2}.cos^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right)=\frac{4\left(\frac{1+\cos A}{2}\right)\left(\frac{1+\cos B}{2}\right)\left(\frac{1+\cos C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{(1+\cos A)(1+\cos B)\left(\frac{1+\cos C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{\frac{(\cos A+\cos B+\cos C-1)}{4}}=\frac{2(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{(\cos A+\cos B+\cos C-1)}.$$

Untuk segitiganya kita ilustrasikan sebagai berikut :

Langkah selanjutnya kita cari nilai $cosinus$ untuk masing – masing sudut,

$$\cos A=\frac{8^2+5^2-7^2}{2.8.5}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$$

$$\cos B=\frac{5^2+7^2-8^2}{2.5.7}=\frac{10}{70}=\frac{1}{7}$$

$$\cos C=\frac{7^2+8^2-5^2}{2.7.8}=\frac{88}{112}=\frac{11}{14}$$

Sehingga,

$$\frac{2(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{(\cos A+\cos B+\cos C-1)}=\frac{2\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{11}{14}\right)}{\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{11}{14}\right)-1\right)}=\frac{(3)\left(\frac{8}{7}\right)\left(\frac{25}{14}\right)}{\frac{6}{14}}=\frac{100}{7}$$

177. Jika $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, buktikan bahwa untuk

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$

Jawab :

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\cos\{180^0-(\alpha+\beta)\}$

$\Leftrightarrow\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-2\cos^2(\alpha+\beta)+1$

$\Leftrightarrow\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}+1$

$\Leftrightarrow\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\{-2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}(-\beta)\}+1$

$\Leftrightarrow\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta+1$

$\Leftrightarrow\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{1}{2}\left(90^0-\frac{1}{2}\gamma\right)2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta+1$

$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma + 1$

$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\cos\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma$

Terbukti
Silahkan pembaca buktikan , jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ maka

- $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma$
- $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma$ (sudah di buktikan)
- $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$
- $sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2$
- $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
- $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
- $\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma = \cot\frac{1}{2}\alpha \cot\frac{1}{2}\beta \cot\frac{1}{2}\gamma$
- $\cot\alpha\cot\beta + \cot\alpha\cot\gamma + \cot\beta\cot\gamma = 1$

178. Jika $\alpha, \beta, dan\ \gamma$ adalah sudut-sudut pada segitiga dan diketahui $\cot\alpha = -3, \cot\beta = 1$. Tentuan nilai $\cot\gamma$

Jawab :
Dengan menggunakan identitas trigonometri

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha . \tan\beta . \tan\gamma$

dan sesuai yang diketahui bahwa

1) $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -3 \Longrightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{3}$

2) $\cot\beta = 1$

maka sesuai rumus identitas di atas

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha . \tan\beta . \tan\gamma \Longrightarrow -\frac{1}{3} + 1 + \tan\gamma = \left(-\frac{1}{3}\right)(1)(\tan\gamma)$

dengan operasi aljabar diperoleh $\tan\gamma = -\frac{1}{2}$

179. Coba anda tunjukkan kebenaran identitas berikut

- $\sin 3A = 3\sin A - 4\, sin^3 A$
- $\cos 3A = 4cos^3 A - 3\cos A$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

180. Tentukan nilai

$$\cos 15^0 + \cos 75^0$$

Jawab :

$\cos 15^0 + \cos 75^0 = \cos 75^0 + \cos 15^0$

$\cos 75^0 + \cos 15^0 = 2.\cos\left(\frac{75^0+15^0}{2}\right)\cos\left(\frac{75^0-15^0}{2}\right) = 2.\cos 45^0.\cos 30^0$

$= 2.\frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

Jadi ,nilai

$\cos 15^0 + \cos 75^0 = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

181. Tunjukkan bahwa nilai eksak dari

$$\sin 18^0 \sin 54^0 = \frac{1}{4}$$

Jawab :

$\sin 18^0.\sin 54^0 = \sin 18^0.\sin 54^0.\left(\frac{2\cos 18^0}{2\cos 18^0}\right) = \frac{2\sin 18^0.\cos 18^0.\sin 54^0}{2\cos 18^0}$

$\Leftrightarrow \sin 18^0.\sin 54^0 = \frac{\sin 2(18^0).\sin 54^0}{2\cos 18^0} = \frac{\sin 36^0.\sin 54^0}{2\cos 18^0} = \frac{\sin 36^0.\sin(90^0-36^0)}{2\cos 18^0} = \frac{\sin 36^0.\cos 36^0}{2\cos 18^0}$

$\Leftrightarrow \sin 18^0.\sin 54^0 = \frac{\frac{1}{2}\sin 72^0}{2\cos 18^0} = \frac{1.\sin 72^0}{4.\cos(90^0-72^0)} = \frac{1}{4}.\frac{\sin 72^0}{\sin 72^0} = \frac{1}{4}$

182. Tentukan nilai eksak untuk

- $\sin 18^0.\sin 36^0$
- $\sin 18^0.\sin 72^0$
- $\cos 18^0.\sin 36^0$
- $\cos 18^0.\sin 54^0$
- $\cos 18^0.\sin 72^0$
- $\sin 36^0.\sin 54^0$
- $\sin 36^0.\sin 72^0$
- $\sin 54^0.\sin 72^0$
- $\cos 54^0.\sin 72^0$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

183. Jika diketahui $\cos A . sin\ B = \frac{1}{6}\sqrt{2}$, $A + B = 45^0$, maka $\cos(B - A)$

Jawab :
Perhatikan di antara identitas trigonometri mengatakan bahwa

- $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A . \cos B} \Longrightarrow \cos A . \cos B = \frac{\sin(A+B)}{tanA + \tan B}$
- $\cot A + \cot B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A , \sin B} \Longrightarrow \sin A . \sin B = \frac{\sin(A+BH)}{\cot\ A + \cot B}$
- $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A . \tan B}$
- $Cos\ (B - A) = \cos B . \cos A + \sin B . \sin A$
- sin (A + B) = sin A . cos B + cos A . sin B

Perhatikan pula

1) Karena $A + B = 45^0$ maka

tan (A+B) = $\tan 45^0 = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A . \tan B} = 1 \Longrightarrow$ tan A + tan B = 1- tan A. tan B

2) sin(A+B) = $\sin 45^0 = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin A . \cos B + \frac{1}{6}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Longrightarrow$ sin A. cos B = $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

3)Sehingga dari 1) dan 2) diperoleh

$\frac{\sin A . \cos B}{\cos A . \sin B} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{2}}{\frac{1}{6}\sqrt{2}} = 2 \Longrightarrow \frac{\sin A}{\cos A} = 2\frac{\sin B}{\cos B} \Longrightarrow \tan A = 2 . \tan B$

dari 1) dan 3) diperoleh

tan A + tan B = 1- tan A. tan B

2 tan B + tan B = 1- 2 tan B. tan B

3 tan B = $1 - 2tan^2 B$

$2tan^2 B + 3\tan B - 1 = 0$ (persamaan kuadrat dalam tan B)

$(\tan B)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$ (ambil yang positif)

Selanjutnya,

$\tan B = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ sehingga $\tan A + \tan B = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} + \frac{-3+\sqrt{17}}{4} = \frac{-9+3\sqrt{17}}{4}$ kita substitusikan ke poin 1 dan 2 di atas.

$\cos A . \cos B = \frac{\sin(A+B)}{\tan A + \tan B} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{17}-9}{4}} = \frac{3\sqrt{34}+9\sqrt{2}}{36}$ dan

$\sin A . \sin B = \frac{\sin(A+B)}{\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{6}{-3+\sqrt{17}}} = \frac{3\sqrt{34}-9\sqrt{2}}{36}$

Sehingga $\cos(B-A) = \cos B . \cos A + \sin B . \sin A = \frac{3\sqrt{34}+9\sqrt{2}}{36} + \frac{3\sqrt{34}-9\sqrt{2}}{36} = \frac{\sqrt{34}}{6}$

Jadi nilai $\cos(B-A) = \cos B . \cos A + \sin B . \sin A = \frac{\sqrt{34}}{6}$

184. Tentukan nilai eksak untuk

$$\tan 1^0 . \tan 2^0 . \tan 3^0 \ldots . \tan 89^0$$

Jawab :
Perhatikan bahwa

$\tan(1^0 + 89^0) = \tan 90^0 = \frac{\tan 1^0 + \tan 89^0}{1 - \tan 1^0 . \tan 89^0} = \infty \Longrightarrow 1 - \tan 1^0 . \tan 89^0 = 0$

maka diperoleh nilai $\tan 1^0 . \tan 89^0 = 1$

Begitu pula untuk

$\tan 2^0 . \tan 88^0 = 1$

$\tan 3^0 . \tan 87^0 = 1$

$\tan 4^0 . \tan 86^0 = 1$

dst

Sehingga

$\tan 1^0 . \tan 2^0 . \tan 3^0 \ldots . \tan 89^0 = 1$

185. (IMO 1963)
Buktikan bahwa $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$

Jawab :
Kita tulis ulang soal di atas,

$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$, langkah yang paling tepat untuk menyelesaikan kesamaan ini adalah $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$ kita kalikan dengan $\left(\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}\right)$. Sehingga kita dapatkan

$=\frac{2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}-2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)-\left(\sin\frac{4\Pi}{7}-\sin\frac{0\Pi}{7}\right)+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$

$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{4\Pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{4\Pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{7}-\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\frac{4\Pi}{7}+\sin\left(\frac{7\pi}{7}-\frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$

$=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{4\Pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$

$=\frac{1}{2}$ (terbukti)

186. (OMITS 2012)

Nilai eksak dari

$$\frac{1}{cos^2 10^0}+\frac{1}{sin^2 20^0}+\frac{1}{sin^2 40^0}-\frac{1}{cos^2 45^0}\text{ adalah}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa untuk

$\frac{1}{cos^2 10^0}=\frac{2}{1+\cos 20^0}$, dan kita misalkan $\cos 20^0=a$

$\frac{1}{sin^2 20^0}=\frac{2}{1-\cos 40^0}$, anggap $\cos 40^0=b$

$\frac{1}{sin^2 40^0}=\frac{2}{1-\cos 80^0}$, anggap $\cos 80^0=c$

$\frac{1}{cos^2 45^0}=2$

Dan

$\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1-b}+\frac{2}{1-c}-2=2\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\right)-2$

$=2\left(\frac{(1-b)(1-c)+(1+a)(1-c)+(1+a)(1-b)}{(1+a)(1-b)(1-c)}\right)-2$

$=\frac{4+2(a-b-c)-2abc}{1+a-b-c-ab-ac+bc+abc}$

Perlu anda ketahui pula bahwa

1· a - b - c = cos 20 - cos 40 -cos 80 = 0 , karena cos 20 = cos 40 + cos 80
2· - ab - ac + bc =
1/2.(cos 60 + cos 20) 1/2.(cos 100 + cos 60) + 1/2.(cos 120 + cos 40) = -3/4
3· abc = cos 20. cos 40. cos 80 = 1/8
Untuk poin 1 - 3 silahkan anda cek dan buktikan sendiri
Sehingga nilai akhirnya adalah
[4 + 2(a-b-c) -2abc]/[1 + (a-b-c) + (-ab-ac+bc) + abc] = [4 - 1/4]/[1+(-3/4)+1/8]=10
Jadi nilai eksak dari

$$\frac{1}{cos^2 10^0}+\frac{1}{sin^2 20^0}+\frac{1}{sin^2 40^0}-\frac{1}{cos^2 45^0}=10$$

187. Tunjukkan bahwa

a. $\cos 80^0 . \cos 40^0 . \cos 20^0 = \frac{1}{8}$

b. $\cos 70^0 . \cos 50^0 . \cos 10^0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$

c. $\cos 80^0 . \cos 70^0 \cos 50^0 \cos 40^0 . \cos 20^0 \cos 10^0 = \frac{\sqrt{3}}{64}$

d. $\cos 80^0 + \cos 40^0 - \cos 20^0 = 0$

e. $cos^2 80^0 + cos^2 40^0 + cos^2 20^0 = \frac{3}{2}$

f. $cos^2 80^0 + 3cos^2 70^0 + cos^2 40^0 + 4cos^2 20^0 = \frac{9}{2}$

g. $cos^3 20^0 - cos^3 40^0 - cos^3 80^0 = \frac{3}{8}$

h. $\tan 80^0 \tan 40^0 \tan 20^0 = \sqrt{3}$

Jawab :

a) $4\cos 20^0 . \cos 40^0 . \cos 80^0 = 2(2\cos 20^0 . \cos 40^0)\cos 80^0$

$= 2(\cos(20^0 + 40^0) + \cos(20^0 - 40^0))\cos 80^0$

$= 2\left(\frac{1}{2} + \cos 20^0\right)\cos 80^0$

$= (1 + 2\cos 20^0)\cos 80^0$

$= \cos 80^0 + 2\cos 20^0 \cos 80^0$

$= \cos 80^0 + (\cos(20^0 + 80^0) + \cos(20^0 - 80^0))$

$= \cos 80^0 + \cos 100^0 + \cos 60^0$

$= \cos 80^0 + (-\cos 80^0) + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

Sehingga $\cos 20^0 . \cos 40^0 . \cos 80^0 = \frac{1}{8}$

b) $\cos 40^0 + \cos 80^0 - \cos 20^0 = -\cos 20^0 + \cos 40^0 + \cos 80^0$

$= -\cos 20^0 + \left(2\cos\left(\frac{40^0+80^0}{2}\right)\cos\left(\frac{40^0-80^0}{2}\right)\right)$

$= -\cos 20^0 + 2\cos 60^0 \cos 20^0$

$= -\cos 20^0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\cos 20^0$

$= -\cos 20^0 + \cos 20^0$

$= 0$

c), d), e), f) Pembahasan diserahkan kepada pembaca

g) Ingat bahwa $\cos 20^0 = \cos 40^0 + \cos 80^0$

Jika masing-masing ruas dipangkatkan tiga

$cos^3 20^0 = cos^3 40^0 + cos^3 80^0 + 3\cos 40^0 . \cos 80^0 (\cos 40^0 + \cos 80^0)$

$cos^3 20^0 = cos^3 40^0 + cos^3 80^0 + 3\cos 40^0 . \cos 80^0 (\cos 20^0)$

$cos^3 20^0 = cos^3 40^0 + cos^3 80^0 + 3\left(\frac{1}{8}\right)$

$cos^3 20^0 - cos^3 40^0 - cos^3 80^0 = \frac{3}{8}$

h) Pembahasan diserahkan kepada pembaca

188. Tunjukkan bahwa

a. $sin^2 5^0 + sin^2 10^0 + sin^2 15^0 + \cdots + sin^2 90^0 = \frac{19}{2}$

b. $\sin 1^0 + \sin 3^0 + \sin 5^0 + \cdots + \sin 57^0 + \sin 59^0 = \cos 1^0 + \cos 3^0 + \cdots + \cos 27^0 + \cos 29^0$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

189. (AHSME1999)
Untuk $x \in R$ yang memenuhi $secan\, x - \tan x = 2$, tentukan nilai $\sec x + \tan x$

Jawab :

$\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 2$

$\frac{1 - \sin x}{\cos x} = 2$

$\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)\left(\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\right) = 2$

$\frac{1-sin^2 x}{\cos x.(1+\sin x)} = 2$

$\frac{cos^2 x}{\cos x.(1+\sin x)} = 2$

$\frac{\cos x}{1+\sin x} = 2$

$\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}$

$\sec x + \tan x = \frac{1}{2}$

190. (OSP 2009/AIME 1986)

Diketahui nilai $\tan x + \tan y = 25$ dan $\cot x + \cot y = 30$. Tentukan nilai $\tan(x + y)$

Jawab :

Diketahui

$\tan x + \tan y = 25$, dan

$\cot x + \cot y = 30$

maka $\cot x + \cot y = 30 \Longrightarrow \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} = 30 \Longrightarrow \frac{\tan x + \tan y}{\tan x . \tan y} = 30 \Longrightarrow \tan x . \tan y = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

Sehingga

$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x . \tan y} = \frac{25}{1-\frac{5}{6}} = \frac{25}{\frac{1}{6}} = 150$

191. (OMITS 2012)

Tentukan nilai eksak dari

$$\frac{27\, sin^3\, 9^0 \;+\; 9\, sin^3\, 27^0 \;+\; 3\, sin^3\, 81^0 \;+\; sin^3\, 243^0}{\sin 9^0}\ ?$$

Jawab :

Ingat bahwa

sin 81^0 = cos 9^0 dan

sin 243^0 = – cos 27^0

$4\ sin^3$ x = 3 sin x – sin 3x

$4\ cos^3$ x = 3 cos x + cos 3x

maka

$27\ sin^3\ 9^0 = \frac{27}{4}$ (3 sin 9^0 – sin 27^0) = $\frac{1}{4}$.(81 sin 9^0 – 27 sin 27^0)

$9\ sin^3\ 27^0 = \frac{1}{4}$.(27 sin 27^0 – 9 sin 81^0)

$3\ sin^3\ 81^0 = 3\ cos^3\ 9^0 = \frac{1}{4}$.(9 cos 9^0 + 3 cos 27^0)

$sin^3\ 243^0 = -\ cos^3\ 27^0 = \frac{1}{4}$.(-3 cos 27^0 – cos 81^0)

Sehingga

$$\frac{27\ sin^3\ 9^0 + 9\ sin^3\ 27^0 + 3\ sin^3\ 81^0 + sin^3\ 243^0}{\sin 9^0}$$

$$= \frac{\frac{81}{4}\sin 9^0 - \frac{27}{4}\sin 27^0 + \frac{27}{4}\sin 27^0 - \frac{9}{4}\sin 81^0 + \frac{9}{4}\cos 9^0 + \frac{3}{4}\cos 27^0 - \frac{3}{4}\cos 27^0 - \frac{1}{4}\cos 81^0}{\sin 9^0}$$

$$= \frac{\frac{81}{4}\sin 9^0 - \frac{27}{4}\sin 27^0 + \frac{27}{4}\sin 27^0 - \frac{9}{4}\cos 9^0 + \frac{9}{4}\cos 9^0 + \frac{3}{4}\cos 27^0 - \frac{3}{4}\cos 27^0 - \frac{1}{4}\sin 9^0}{\sin 9^0}$$

$$= \frac{\frac{81}{4}\sin 9^0 - \frac{1}{4}\sin 9^0}{\sin 9^0}$$

$$= \frac{\frac{80}{4}\sin 9^0}{\sin 9^0} = 20$$

Jadi, nilai eksak dari $\frac{27\ sin^3\ 9^0 + 9\ sin^3\ 27^0 + 3\ sin^3\ 81^0 + sin^3\ 243^0}{\sin 9^0} = 20$

D. KOMBINATORIKA (COMBINATORICS)

192. Ada berapa banyak cara memilih 3 orang dari 5 orang siswa untuk menjabat sebagai ketua OSIS, wakil dan bendaharanya

Jawab :
Persoalan ini adalah masalah permutasi 3 obyek yang dipilih dari 5 obyek pilihan.
Jadi, $5^{P}{}_{2} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2} = 60$
Andaim kata susunan tidak disebutkan maka gunakan aturan kombinasi

193. Tentukan banyaknya susunan dari kata"OLIMPIADE"!

Jawab :
Huruf O ada 1, L ada 1, I ada 2, M ada 1, P ada 1, A ada 1, D ada 1, dan E ada 1
Total huruf ada 9
Gunakan aturan *permutasi*
Sehingga banyaknya susunan dari huruf tersebut adalah
P(9,1,1,2,1,1,1,1,1) = 9!/(1!1!2!1!1!1!1!1!) = 181440

194. (OMITS 2012)
Diketahui 2012 titikpada sebuah bidang dan tidak ada 3 buah titik yang segaris.
Banyaknya garis lurus yang dapat dibuat dari titik-titik tersebut adalah ...

Jawab :
Gunakan rumus kombinasi untuk menyelesaikan soal ini yaitu C(2012,2) = 1/2. 2012. 2011 = 1006 . 2011
Jadi banyaknya garis ada sebanyak 1006.2011

195. (OMITS 2012)
Zakiyyah menggambarkan poligon 2012 sisi pada di sebuah kertas, kemudian Sulastri datang menghampirinya. Sulastri meminta Zakiyyah untuk menarik garis-
garis diagonal
dari setiap sudut poligon 2012 sisi tersebut. Tentukan banyaknya diagonal yang dibua
t!

Jawab :
Untuk mengerjakan soal tersebut gunakan rumus Kombinasi yaitu
C(n,2) - n = 1/2.[n.(n-3)] dengan n = banyaknya segi
Sehingga untuk Segi (n) = 2012 diperoleh
C(2012,2) - 2012 = 1/2.[2012.2009] = 1006.2009 = 2021054
Jadi banyaknya diagonal untuk segi 2012 adalah 2021054

196. Coba anda perhatikan bilangan 1, 2, 3, … , 2013. Berapa kali kita menuliskan angka nol?

Jawab :

Perhatikan kembali penulisan bilangan 1, 2, 3, …, 2013.

Untuk 1 sampai dengan 1000 muncul sebanyak 192 kali, dengan rincian sebagai berikut :

- 1 sampai dengan 100 ada 11 kali
- 101 sampai dengan 200 ada 20 kali
- 201 sampai dengan 300 ada 20 kali

dst

- 801 sampai dengan 900 ada 20 kali
- 901 sampai dengan 1000 ada 21 kali

Untuk 1001 sampai dengan 2000 ada sebanyak 119 + 181 = 300 kali

- 1001 sampai dengan 1100 ada 119 kali
- 1101 sampai dengan 1200 ada 20 kali
- 1201 sampai dengan 1210 ada 20 kali

dst

- 1801 sampai dengan 1900 ada 20 kali
- 1901 sampai dengan 2000 ada 21 kali

Untuk 2001 sampai dengan 2013 ada sebanyak 23 kali

Jadi, banyaknya angka nol pada penulisan bilangan 1, 2, 3, … , 2013 muncul sebanyak 515 kali.

197. Buktikan bahwa $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

Jawab :

Perhatika bahwa $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, maka

Akan kita tunjukkan untuk $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\big((n-1)-(r-1)\big)!} + \frac{(n-1)!}{r!\big((n-1)-r\big)!}$$

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$$

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!(r+n-r)}{r!(n-r)!}$$

$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!n}{r!(n-r)!}$

$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$

Jadi terbukti bahwa $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$

198. Jika $(x+1)^n$ kalau diuraikan akan mempunyai $n+1$ suku, sehingga akan mempunyai $n+1$ koefisien pula, yaitu

$$(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \cdots + nx + 1$$

a. Untuk $n = 5$, carilah koefisien yang kelipatan 5
b. Untuk $n = 6$, carilah koefisien yang kelipatan 6
c. Untuk $n = 7$, carilah koefisien yang kelipatan 7
d. Untuk $n = 101$, carilah koefisien yang kelipatan 101

Jawab :
Diserahkan kepada pembaca

199. Jabarkanlah bentuk $(3a - b)^6$

Jawab :
Silahkan pembaca jabarkan sendiri

200. Carilah koefisien dari x^5y^8 dari penjabaran $(x+y)^{13}$

Jawab :
Ingat bahwa

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} . y^k$

$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$

Dari soal diperoleh $n = 13$, $m - 1 = 8 \Longrightarrow m = 9$ (suku ke 9)

Sehingga suku ke 9 = $\binom{13}{8}x^5y^8 = \frac{13!}{5!.8!}x^5y^8$

201. Carilah koefisien ab^2c pada penjabaran $(a + 3b - c)^4$

Jawab :
Dengan cara yang tidak jauh dari sebelumnya

$\binom{4}{3}a^{4-3}(3b-c)^3 = \binom{4}{3}a^1\binom{3}{1}(3b)^{3-1}(-c)^1 = -\binom{4}{3}\binom{3}{1}a(3b)^2c = -4.3.9ab^2c =$

$-108ab^2c$

202. Tentukan koefisien dari $x^3y^2z^4$ pada penjabaran $(x+y-2z)^9$

Jawab :
Penyelesaiannya diserahkan kepada pembaca

203. (AIME 1983)
Carilah sisa pembagian jika $6^{83}+8^{83}$ jika dibagi oleh 49

Jawab :

$6^{83}+8^{83}=(7-1)^{83}+(7+1)^{83}$

$(7-1)^{83}+(7+1)^{83}=\left(7^{83}-\binom{83}{1}7^{82}+\cdots-1\right)+\left(7^{83}+\binom{83}{1}7^{82}+\cdots+1\right)$

$(7-1)^{83}+(7+1)^{83}=2\left(7^{83}+\binom{83}{2}7^{81}+\cdots+\binom{83}{80}7^3+\binom{83}{82}7\right)$

$(7-1)^{83}+(7+1)^{83}=\underbrace{2\left(7^{83}+\binom{83}{2}7^{81}+\cdots+\binom{83}{80}7^3\right)}_{kelipatan\ 49}+2.\underbrace{\frac{83!}{1!.82!}.7}_{sisa}$

Jadi sisa $6^{83}+8^{83}$ oleh 49 adalah 2.83.7 dan $2.\frac{83.7}{49}=\frac{1162}{49}=23\text{ dan bersisa }35$

Jadi sisa pembagian $6^{83}+8^{83}$ oleh 49 bersisa 35

204. (AIME 1986)
Polinom $1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{17}$ dapat ditulis sebagai polinom dalam variabel y dengan $y=x+1$, maka koefisien dari y^2 adalah

Jawab :
Perhatikan bahwa

$(1-a^2)=(1+a)(1-a)$

$(1-a^3)=(1+a)(1-a+a^2)$

$(1-a^4)=(1+a)(1-a+a^2-a^3)$

.

.

.

$(1-a^{18})=(1+a)(1-a+a^2-a^3+a^4-\cdots-a^{17})$

Jadi soal di atas dapat dituliskan sebagi

$$1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{17}=\frac{1-x^{18}}{1+x}$$

Karena $y=x+1$, maka

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{17} = \frac{1 - (y-1)^{18}}{y}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{17} = \frac{1 - \left(\binom{18}{0}y^{18} - \binom{18}{1}y^{17} + \binom{18}{2}y^{16} - \cdots - \binom{18}{15}y^3 + \binom{18}{16}y^2 - \binom{18}{17}y^1 + \binom{18}{18}\right)}{y}$$

Jadi koefisien y^2 adalah saat y^3 dibagi y yaitu $\binom{18}{15} = 816$

205. (AIME 2001)

Tentukan jumlah semua akar-akar dari polinom $x^{2001} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2001} = 0$

Jawab :

Penyelesaian diserahkan kepada pembaca

206. Jika masing-masing huruf diambil dari kata “MUDAH” dan “BANGET”. Berapakah peluang satu konsonan serta satu vokal

Jawab :

Peluangnya adalah

1 konsonan dari “MUDAH” dan 1 vokal dari “BANGET” atau sebaliknya, sehingga total peluangnya

$\frac{2}{5}.\frac{4}{6} + \frac{3}{5}.\frac{2}{6} = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$

207. (OMITS 2012)

Bila $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$,

maka untuk nilai dari

$\binom{2012}{0}\binom{2012}{1} + \binom{2012}{1}\binom{2012}{2} + \binom{2012}{2}\binom{2012}{3} + \cdots + \binom{2012}{2011}\binom{2012}{2012}$ adalah…

Jawab :

Perhatikan bahwa ada rumus

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{r+1} = \binom{2n}{n+1}$$

Jadi jawaban untuk soal diatas adalah

$\binom{2012}{0}\binom{2012}{1} + \binom{2012}{1}\binom{2012}{2} + \binom{2012}{2}\binom{2012}{3} + \cdots + \binom{2012}{2011}\binom{2012}{2012} = \binom{4024}{2013}$

208. Tentukan banyaknya pasangan (x, y, z) jika $x + y + z = 6$ dengan

a. $1 \leq x, y, z \leq 5$
b. $x, y,$ dan z adalah bilangan bulat tak negatif

Jawab :

a. $x + y + z = 6$ dengan $1 \leq x, y, z \leq 5$

Karena pertanyaan di atas tidak mensyaratkan sesuatu, pasti membolehkan adanya pengulangan, sehingga kita susun saja jawaban yang diinginkan, yaitu;
$x + y + z = 6$
1 + 1 + 4 = 6, 1 + 4 + 1 = 6, 4 + 1 + 1 = 6
1 + 2 + 3 = 6, 1 + 3 + 2 = 6, 2 + 1 + 3 = 6, 2 + 3 + 1 = 6
3 + 1 + 2 = 6, 3 + 2 + 1 = 6, dan 2 + 2 + 2 = 6
Jadi ada 10 pasangan

b. Untuk menjawab soal yang kedua ini

Alternatif 1 :
Dari jawaban a) kita tinggal menambahkan yang belum, yaitu;
0 + 1 + 5 = 6, 0 + 5 + 1 = 6, 1 + 0 + 5 = 6, 1 + 5 + 0 = 6
5 + 0 + 1 = 6, 5 + 1 + 0 = 6,
0 + 2 + 4 = 6, 0 + 4 + 2 = 6, 2 + 0 + 4 = 6, 2 + 4 + 0 = 6
4 + 0 + 2 = 6, 4 + 2 + 0 = 6
0 + 3 + 3 = 6, 3 + 0 + 3 = 6, 3 + 3 + 0 = 6
0 + 0 + 6 = 6, 0 + 6 + 0 = 6, dan 6 + 0 + 0 = 6
Jadi terdapat sebanyak 28 pasangan

Alternatif 2 :
Kita dapat menggunakan aturan kombinasi

$$\binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6!\,2!} = 28$$

209. Tentukan banyaknya solusi bilangan asli jika $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k$?

Jawab :
Jawaban diserahkan kepada pembaca

210. Tentukan banyaknya susunan bilangan asli (x, y) yang memenuhi $x + y = 5$

Jawab :
$x + y = 5$, dan $x, y \in$ bilangan asli, maka
Dapat kita simulasikan sebagai berikut
$1 + 4 = 5$, $2 + 3 = 5$, $3 + 2 = 5$, dan $4 + 1 = 5$
Atau dapat kita tuliskan $\binom{5-1}{2-1} = \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$

Jadi ada 4 susunan

211. Carilah banyaknya tupel bilangan asli (a, b, c, d) yang memenuhi $a + b + c + d = 17$

Jawab :
Sama seperti di atas $\binom{17-1}{4-1} = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3!13!} = \frac{16.15.14}{1.2.3} = 560$

212. (OMITS 2012)
Berapakah banyaknya pasangan bilangan nonnegatif (O, M, I, T, S) jika
O + M + I + T + S = 12
dengan O ≤ 3, M ≤ 4, I ≤ 5, T ≤ 6, S ≤ 7?

Jawab :
Misalkan kita buatkan variabel baru, sehingga dapat kita tuliskan kembali
t_1 = 3 – O
t_2 = 4 – M
t_3 = 5 – I
t_4 = 6 – T
t_5 = 7 – S
t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 – O – M – I – T – S
t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 – (O + M + I + T + S)
t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 25 – (12) = 13
Sehingga $\binom{13+5-1}{5-1} = \binom{17}{4} = \frac{17!}{(17-4)!.4!} = \frac{17!}{13!.4!} = \frac{17.16,15.14}{4.3.2.1} = 2380$

Jadi, banyaknya pasangan bilangan nonnegatif yang diinginkan adalah 2380.

213. Berapakah tripel bilangan bulat yang terjadi jika persamaan $x + y + z = 9$ dengan syarat $0 \leq x \leq 4$; $0 \leq y \leq 5$; $0 \leq z \leq 3$

Jawab :
Silahkan coba sendiri dengan cara di atas

214. (OMITS 2012)
Tentukan harga dari

C(2012,0) + $\frac{1}{2}$.C(2012,1) + $\frac{1}{3}$.C(2012,2) + . . . + $\frac{1}{2013}$.C(2012,2012)

Jawab :
Untuk solusi ini gunakan rumus

C(n,0) + $\frac{1}{2}$.C(n,1) + $\frac{1}{3}$.C(n,2) + . . . + $\frac{1}{(n+1)}$.C(n,n) = $\frac{1}{(n+1)}$.[$2^{(n+1)} - 1$]

maka

C(2012,0) + $\frac{1}{2}$.C(2012,1) + $\frac{1}{3}$.C(2012,2) + . . . + $\frac{1}{2013}$.C(2012,2012) adalah

= $\frac{1}{2013}$.[$2^{(n+1)} - 1$]

215. (OMITS 2012)
Diketahui himpunan $A = \{1,2,3,\dots,4024\}$. Jika subhimpunan dari A yang terdiri k elemen selalu memuat 2 buah bilangan yang saling prima, maka nilai k yang memenuhi adalah…

Jawab :
Gunakan prinsip sarang burung merpati(*pigeonhole principle*)
yaitu jika ada $n+1$ objek (sebut saja burung merpati) yang akan menempati n tempat (sebut saja sarangnya merpati), maka salah satu tempat akan berisi lebih dari satu objek.
Sebagai contoh ; kalau ada 10 burung dan sarang Cuma ada 9 maka salah satu sarang akan ditempati lebih dari satu burung.
Sehingga soal di atas dapat kita tulis kembali dengan himpunan $A = \{1,2,3,\dots,2n\}$
Sehingga perlu $n+1$ elemen (objek)
Jadi $k = n + 1 = 2013$ elemen(objek)

216. Jika satu kartu ditandai dengan angka 1, dua buah kartu dengan angka 2, tiga buah kartu dengan angka 3, dan begitu seterusnya sampai lima puluh kartu ditandai dengan angka 50 dan semua kartu dimasukkan ke dalam kotak. Berapa buah kartu minimal harus diambil agar dapat dipastikan terdapat sekurang-kurangnya 10 kartu dengan tanda angka yang sama?

Jawab :
Misalkan

Kotak ke- (sarang)	1	2	3	…	50
Isi/banyak(merpati)	1	2	3	…	50

mula-mula kita ambil kartu yang bertanda 1 sampai 9(anggap saja sarang yang pertama sampai sarang yang ke Sembilan),
sehingga totalnya

$$untuk\ kartu\ 1\ sampai\ 9 = \frac{1}{2}.9.10 = 45$$

Sampai langkah di sini kita belum mendapatkan kartu yang bertanda 10.

kartu tanda(dalam kotak/Sarang) yang masih tersisa adalah yang bertanda 10 sampai 50, sehingga masih ada sekitar 41 kartu bertanda(dalam kotak/sarang). Sesuai dengan pertanyaan maka kartu yang dibutuhkan sehingga yang terambil sekurang-kurangnya 10 buah kartu dengan tanda yang sama adalah
$(r-1).n+1=(10-1).41+1=370$
Sehingga total kartunya yang perlu diambil adalah minimal = 45 +370 = 415 buah

217. (OMITS 2012)
Jika 100000001 suku pertama dari barisan Fibonacci terdapat suku yang berakhiran dengan S angka nol, maka nilai dari S adalah

Jawab : 4
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

218. (OMITS 2012)
Jika beberapa tim mengikuti turnamen sepak bola. Setiap tim bertemu tepat satu kali dengan lainnya. Bagi pemenang setiap pertandingan akan memperoleh nilai 3, kalah o dan kalau seri, keduanya masing-masing memperoleh nilai 1. Jika di akhir turnamen angka 2012 tidak pernah muncul pada tiap perolehan poin total masing-masing tim, maka banyaknya tim yang mengikuti turnamen sepak bola tersebut adalah…

Jawab :
Yang pertama kita cari total pertandingan, setelah ketemu selanjutnya kita urai keperolehan nilai menang dan seri.
Untuk mencari total pertandingan gunakan rumus kombinasi, karena setiap tim bertemu satu kali maka :
$C(n,2)=\frac{1}{2}.n.(n-1)$ dengan *n* = banyaknya tim yang ikut turnamen tersebut
untuk total perolehan nilai dari soal diketahui tidak pernah muncul nilai **2012,** maka
Total nilai = [menang x 3] + [seri x 1] < 2012
Kita dapat memasukkan harga *n* bebas untuk mencari jawaban yang diinginkan.

- untuk *n* = 50 ⟹ maka $\frac{1}{2}$.50.49 =1225 total pertandingan. Dari sini ada sekitar 1225 total pertandingan, katakanlah menang 200. lainnya 1025 draw maka total nilainya adalah = 3 x 200 + 1025 x 2 = 600 + 2050 = 2650, jelas tidak memenuhi, demikian pula apa bila menangnya lebih banyak dan *seri*nya lebih sedikit.
- untuk *n* = 40 ⟹ maka $\frac{1}{2}$. 40 . 39 = 780 total pertandingan, misalkan menangnya 452 dan serinya 328 maka total nilainya adalah = 3 x 452 + 2 x 328 = 1356 + 656 = 2012 dan ini tidak yang kita harapkan
- untuk *n* = 39 ⟹ maka $\frac{1}{2}$. 39. 38 = 741 total pertandingan, tetapi dari total pertandingan ini jika katakanlah menang 530 kali, seri 211 maka

akan didapatkan nilai = 3 x 530 + 2 x 211 = 1590 + 422 = 2012 dan ini tidak mungkin karena total nilai 2012 dikatakan tidak pernah muncul

- untuk $n = 38 \Longrightarrow$ maka $\frac{1}{2}$. 38 . 37 = 703 total pertandingan. Anggap menang yang terjadi 606 dan seri 97 maka total nilainya adalah = 3 x 606 + 2 x 97 = 1818 + 194 = 2012 dan ini juga tidak diinginkan
- untuk $n = 37 \Longrightarrow$ maka $\frac{1}{2}$. 37. 36 = 666, mau menang ataupun seri tidak akan ketemu total nilai sampai 2012. katakanlah menang semuanya maka 666 x 3 = 1998

Sehingga total tim yang mengikuti turnamen sepak bola tersebut adalah 37 tim

Bilangan prima 1 sampai 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541

547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641
643	647	653	659	661	673	677	683
961	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857
859	893	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971

977	983
991	997

Faktor Bilangan Asli 1-1000 Lengkap dengan Faktor Prima

Daftar Bilangan : Tunggal, Prima dan Komposit(majmuk)

Faktor 1-40

1	11	21 = 3.7	31
2	12 = $2^2.3$	22 = 2.11	32 = 2^5
3	13	23	33 = 3.11
4 = 2^2	14 = 2.7	24 = $2^3.3$	34 = 2.17
5	15 = 3.5	25 = 5^2	35 = 5.7
6 = 2.3	16 = 2^4	26 = 2.13	36 = $2^2.3^2$
7	17	27 = 3^3	37
8 = 2^3	18 = 2.3^2	28 = $2^2.7$	38 = 2.19
9 = 3^2	19	29	39 = 3.13
10 = 2.5	20 = $2^2.5$	30 = 2.3.5	40 = $2^3.5$

Faktor 41-80

41	51 = 3.17	61	71
42 = 2.3.7	52 = $2^2.13$	62 = 2.31	72 = $2^3.3^2$
43	53	63 = $3^2.7$	73
44 = $2^2.11$	54 = 2.3^3	64 = 2^6	74 = 2.37
45 = $3^2.5$	55 = 5.11	65 = 5.13	75 = 3.5^2
46 = 2.23	56 = $2^3.7$	66 = 2.3.11	76 = $2^2.19$
47	57 = 3.19	67	77 = 7.11
48 = $2^4.3$	58 = 2.29	68 = $2^2.17$	78 = 2.3.13
49 = 7^2	59	69 = 3.23	79
50 = 2.5^2	60 = $2^2.3.5$	70 = 2.5.7	80 = $2^4.5$

Faktor 81-120

81 = 3^4	91 = 7.13	101	111 = 3.37

82 = 2.41	$92 = 2^2.23$	102 = 2.3.17	$112 = 2^4.7$
83	93 = 3.31	103	113
$84 = 2^2.3.7$	94 = 2.47	$104 = 2^3.13$	114 = 2.3.19
85 = 5.17	95 = 5.19	105 = 3.5.7	115 = 5.23
86 = 2.43	$96 = 2^5.3$	106 = 2.53	$116 = 2^2.29$
87 = 3.29	97	107	$117 = 3^2.13$
$88 = 2^3.11$	$98 = 2.7^2$	$108 = 2^2.3^3$	118 = 2.59
89	$99 = 3^2.11$	109	119 = 7.17
$90 = 2.3^2.5$	$100 = 2^2.5^2$	110 = 2.5.11	$120 = 2^3.3.5$

Faktor 121-160

$121 = 11^2$	131	141 = 3.47	151
122 = 2.61	$132 = 2^2.3.11$	142 = 2.71	$152 = 2^3.19$
123 = 3.41	133 = 7.19	143 = 11.13	$153 = 3^2.17$
$124 = 2^2.31$	134 = 2.67	$144 = 2^4.3^2$	154 = 2.7.11
$125 = 5^3$	$135 = 3^3.5$	145 = 5.29	155 = 5.31
$126 = 2.3^2.7$	$136 = 2^3.17$	146 = 2.37	$156 = 2^2.3.13$
127	137	$147 = 3.7^2$	157
$128 = 2^7$	138 = 2.3.23	$148 = 2^2.37$	158 = 2.79
129 = 3.43	139	149	159 = 3.53
130 = 2.5.13	$140 = 2^2.5.7$	$150 = 2.3.5^2$	$160 = 2^5.5$

Faktor 161-200

161 = 7.23	$171 = 3^2.19$	181	191
$162 = 2.3^4$	$172 = 2^2.43$	182 = 2.7.13	$192 = 2^6.3$
163	173	183 = 3.61	193
$164 = 2^2.41$	174 = 2.3.29	$184 = 2^3.83$	194 = 2.97
165 = 3.5.11	$175 = 5^2.7$	185 = 5.37	195 = 3.5.13
166 = 2.83	$176 = 2^4.11$	186 = 2.3.31	$196 = 2^2.7^2$

167

$168 = 2^3.3.7$

$169 = 13^2$

170 = 2.5.17

177 = 3.59

178 = 2.89

179

$180 = 2^2.3^2.5$

187 = 11.17

$188 = 2^2.47$

$189 = 3^3.7$

190 = 2.5.19

197

$198 = 2.3^2.11$

199

$200 = 2^3.5^2$

Faktor 201-240

201 = 3.67

202 = 2.101

203 = 7.29

$204 = 2^2.3.17$

205 = 5.41

206 = 2.103

$207 = 3^2.23$

$208 = 2^4.13$

209 = 11.19

210 = 2.3.5.7

211

$212 = 2^2.53$

213 = 3.71

214 = 2.107

215 = 5.43

$216 = 2^3.3^3$

217 = 7.31

218 = 2.109

219 = 3.73

$220 = 2^2.5.11$

221 = 13.17

222 = 2.3.37

223

$224 = 2^5.7$

$225 = 3^2.5^2$

226 = 2.113

227

$228 = 2^2.3.19$

229

230 = 2.5.23

231 = 3.7.11

$232 = 2^3.29$

233

$234 = 2.3^2.13$

235 = 5.47

$236 = 2^2.59$

237 = 3.79

238 = 2.7.17

239

$240 = 2^4.3.5$

Faktor 241-280

241

$242 = 2.11^2$

$243 = 3^5$

$244 = 2^2.61$

$245 = 5.7^2$

246 = 2.3.41

247 = 13.19

$248 = 2^3.31$

249 = 3.83

$250 = 2.5^3$

251

$252 = 2^2.3^2.7$

253 = 11.23

254 = 2.127

255 = 3.5.17

$256 = 2^8$

257

258 = 2.3.43

259 = 7.37

$260 = 2^2.5.13$

$261 = 3^2.29$

262 = 2.131

263

$264 = 2^3.3.11$

265 = 5.33

266 = 2.7.19

267 = 3.89

$268 = 2^2.67$

269

$270 = 2.3^3.5$

271

$272 = 2^4.17$

273 = 3.7.13

274 = 2.137

$275 = 5^2.11$

$276 = 2^2.3.23$

277

278 = 2.139

$279 = 3^2.31$

$280 = 2^3.5.7$

Faktor 281-320

281

282 = 2.3.47

283

284 = $2^2.71$

285 = 3.5.19

286 = 2.11.13

287 = 7.41

288 = $2^5.3^2$

289 = 17^2

290 = 2.5.29

291 = 3.97

292 = $2^2.73$

293

294 = $2.3.7^2$

295 = 5.59

296 = $2^3.37$

297 = $3^3.11$

298 = 2.149

299 = 13.23

300 = $2^2.3.5^2$

301 = 7.43

302 = 2.151

303 = 3.101

304 = $2^4.19$

305 = 5.61

306 = $2.3^2.17$

307

308 = $2^2.7.11$

309 = 3.103

310 = 2.5.31

311

312 = $2^3.3.13$

313

314 = 2.157

315 = $3^2.5.7$

316 = $2^2.79$

317

318 = 2.3.53

319 = 11.29

320 = $2^6.5$

Faktor 321-360

321 = 3.107

322 = 2.7.23

323 = 17.19

324 = $2^2.3^4$

325 = $5^2.13$

326 = 2.163

327 = 3.109

328 = $2^3.41$

329 = 7.47

330 = 2.3.5.11

331

332 = $2^2.83$

333 = $3^2.37$

334 = 2.167

335 = 5.67

336 = $2^4.3.7$

337

338 = 2.13^2

339 = 3.113

340 = $2^2.5.17$

341 = 11.31

342 = $2.3^2.19$

343 = 7^3

344 = $2^3.43$

345 = 3.5.23

346 = 2.173

347

348 = $2^2.3.29$

349

350 = $2.5^2.7$

351 = $3^3.13$

352 = $2^5.11$

353

354 = 2.3.59

355 = 5.71

356 = $2^2.89$

357 = 3.7.17.

358 = 2.179

359

360 = $2^3.3^2.5$

Faktor 361-400

361 = 19^2

362 = 2.181

371 = 7.53

372 = $2^2.3.31$

381 = 3.127

382 = 2.191

391 = 17.23

392 = $2^3.7^2$

363 = 3.11^2
364 = $2^2.7.13$
365 = 5.73
366 = 2.3.61
367
368 = $2^4.23$
369 = $3^2.41$
370 = 2.5.37

373
374 = 2.11.17
375 = 3.5^3
376 = $2^3.47$
377 = 13.29
378 = $2.3^3.7$
379
380 = $2^2.5.19$

383
384 = $2^7.3$
385 = 5.7.11
386 = 2.193
387 = $3^2.43$
388 = $2^2.97$
389
390 = 2.3.5.13

393 = 3.131
394 = 2.197
395 = 5.79
396 = $2^2.3^2.11$
397
398 = 2.199
399 = 3.7.19
400 = $2^4.5^2$

Faktor 401-440

401
402 = 2.3.67
403 = 13.31
404 = $2^2.101$
405 = $3^4.5$
406 = 2.7.29
407 = 11.37
408 = $2^3.3.17$
409
410 = 2.5.41

411 = 3.137
412 = $2^2.103$
413 = 7.59
414 = $2.3^2.23$
415 = 5.83
416 = $2^5.13$
417 = 3.139
418 = 2.11.19
419
420 = $2^2.3.5.7$

421
422 = 2.211
423 = $3^2.47$
424 = $2^3.53$
425 = $5^2.17$
426 = 2.3.71
427 = 7.61
428 = $2^2.107$
429 = 3.11.13
430 = 2.5.43

431
432 = $2^4.3^3$
433
434 = 2.7.31
435 = 3.5.29
436 = $2^2.109$
437 = 19.23
438 = 2.3.73
439
440 = $2^3.5.11$

Faktor 441-480

441 = $3^2.7^2$
442 = 2.13.17
443
444 = $2^2.3.37$
445 = 5.89
446 = 2.223

451 = 11.41
452 = $2^2.113$
453 = 3.151
454 = 2.227
455 = 5.7.13
456 = $2^3.3.19$

461
462 = 2.3.7.11
463
464 = $2^4.29$
465 = 3.5.31
466 = 2.233

471 = 3.157
472 = $2^3.59$
473 = 11.43
474 = 2.3.79
475 = $5^2.19$
476 = $2^2.7.17$

447 = 3.149

448 = $2^{6}.7$

449

450 = $2.3^{2}.5^{2}$

457

458 = 2.229

459 = $3^{3}.17$

460 = $2^{2}.5.23$

467

468 = $2^{2}.3^{2}.13$

469 = 7.67

470 = 2.5.47

477 = $3^{2}.53$

478 = 2.239

479

480 = $2^{5}.3.5$

Faktor 481-520

481 = 13.37

482 = 2.241

483 = 3.7.23

484 = $2^{2}.11^{2}$

485 = 5.97

486 = 2.3^{5}

487

488 = $2^{3}.61$

489 = 3.163

490 = $2.5.7^{2}$

491

492 = $2^{2}.3.41$

493 = 17.29

494 = 2.13.19

495 = $3^{2}.5.11$

496 = $2^{4}.31$

497 = 7.71

498 = 2.3.83

499

500 = $2^{2}.5^{3}$

501 = 3.167

502 = 2.251

503

504 = $2^{3}.3^{2}.7$

505 = 5.101

506 = 2.11.23

507 = 3.13^{2}

508 = $2^{2}.127$

509

510 = 2.3.5.17

511 = 7.73

512 = 2^{9}

513 = $3^{3}.19$

514 = 2.257

515 = 5.103

516 = $2^{2}.3.43$

517 = 11.47

518 = 2.7.37

519 = 3.173

520 = $2^{3}.5.13$

Faktor 521-560

521

522 = $2.3^{2}.291$

523

524 = $2^{2}.131$

525 = $3.5^{2}.7$

526 = 2.263

527 = 17.31

528 = $2^{4}.3.11$

529 = 23^{2}

530 = 2.5.53

531 = $3^{2}.59$

532 = $2^{2}.7.19$

533 = 13.41

534 = 2.3.89

535 = 5.107

536 = $2^{3}.67$

537 = 3.179

538 = 2.269

539 = $7^{2}.11$

540 = $2^{2}.3^{3}.5$

541

542 = 2.271

543 = 3.181

544 = $2^{5}.17$

545 = 5.109

546 = 2.3.7.13

547

548 = $2^{2}.137$

549 = $3^{2}.61$

550 = $2.5^{2}.11$

551 = 19.29

552 = $2^{3}.3.23$

553 = 7.79

554 = 2.277

555 = 3.5.37

556 = $2^{2}.139$

557

558 = $2.3^{2}.31$

559 = 13.43

560 = $2^{4}.5.7$

Faktor 561-600

561 = 3.11.17

562 = 2.281

563

564 = $2^2.3.47$

565 = 5.113

566 = 2.283

567 = $3^4.7$

568 = $2^3.71$

569

570 = 2.3.5.19

571

572 = $2^2.11.13$

573 = 3.191

574 = 2.7.41

575 = $5^2.23$

576 = $2^6.3^2$

577

578 = 2.17^2

579 = 3.193

580 = $2^2.5.29$

581 = 7.83

582 = 2.3.97

583 = 11.53

584 = $2^3.73$

585 = $3^2.5.13$

586 = 2.293

587

588 = $2^2.3.7^2$

589 = 19.31

590 = 2.5.59

591 = 3.197

592 = $2^4.37$

593

594 = $2.3^3.11$

595 = 5.7.17

596 = $2^2.149$

597 = 3.199

598 = 2.13.23

599

600 = $2^3.3.5^2$

Faktor 601-640

601

602 = 2.7.43

603 = $3^2.67$

604 = $2^2.151$

605 = 5.11^2

606 = 2.3.101

607

608 = $2^5.19$

609 = 3.7.29

610 = 2.5.61

611 = 13.47

612 = $2^2.3^2.17$

613

614 = 2.307

615 = 3.5.41

616 = $2^3.7.11$

617

618 = 2.3.103

619

620 = $2^2.5.31$

621 = $3^3.23$

622 = 2.311

623 = 7.89

624 = $2^4.3.13$

625 = 5^4

626 = 2.313

627 = 3.11.19

628 = $2^2.157$

629 = 17.37

630 = $2.3^2.5.7$

631

632 = $2^3.79$

633 = 3.211

634 = 2.317

635 = 5.127

636 = $2^2.3.53$

637 = $7^2.13$

638 = 2.11.29

639 = $3^2.71$

640 = $2^7.5$

Faktor 641-680

641

642 = 2.3.107

651 = 3.7.31

652 = $2^2.163$

661

662 = 2.331

671 = 11.61

672 = $2^5.3.7$

643

644 = $2^2.7.23$

645 = 3.5.43

646 = 2.17.19

647

648 = $2^3.3^4$

649 = 11.59

650 = $2.5^2.13$

653

654 = 2.3.109

655 = 5.131

656 = $2^4.41$

657 = $3^2.73$

658 = 2.7.47

659

660 = $2^2.3.5.11$

663 = 3.13.17

664 = $2^3.83$

665 = 5.7.19

666 = $2.3^2.37$

667 = 23.29

668 = $2^2.167$

669 = 3.223

670 = 2.5.67

673

674 = 2.337

675 = $3^3.5^2$

676 = $2^2.13^2$

677

678 = 2.3.113

679 = 7.97

680 = $2^3.5.17$

Faktor 681-720

681 = 3.227

682 = 2.11.31

683

684 = $2^2.3^2.19$

685 = 5.137

686 = 2.7^3

687 = 3.229

688 = $2^4.43$

689 = 13.53

690 = 2.3.5.23

691

692 = $2^2.173$

693 = $3^2.7.11$

694 = 2.347

695 = 5.139

696 = $2^3.3.29$

697 = 17.41

698 = 2.349

699 = 3.233

700 = $2^2.5^2.7$

701

702 = $2.3^3.13$

703 = 19.37

704 = $2^6.11$

705 = 3.5.47

706 = 2.353

707 = 7.101

708 = $2^2.3.59$

709

710 = 2.5.71

711 = $3^2.79$

712 = $2^3.89$

713 = 23.31

714 = 2.3.7.17

715 = 5.11.13

716 = $2^2.179$

717 = 3.239

718 = 2.359

719

720 = $2^4.3^2.5$

Faktor 721-760

721 = 7.103

722 = 2.19^2

723 = 3.241

724 = $2^2.181$

724 = $5^2.29$

726 = $2.3.11^2$

731 = 17.43

732 = $2^2.3.61$

733

734 = 2.367

735 = $3.5.7^2$

736 = $2^5.23$

741 = 3.13.19

742 = 2.7.53

743

744 = $2^3.3.31$

745 = 5.149

746 = 2.373

751

752 = $2^4.47$

753 = 3.251

754 = 2.13.29

755 = 5.151

756 = $2^2.3^3.7$

727	737 = 11.67	747 = $3^2.83$	757
728 = $2^3.7.13$	738 = $2.3^2.41$	748 = $2^2.11.17$	758 = 2.379
729 = 3^6	739	749 = 7.107	759 = 3.11.23
730 = 2.5.73	740 = $2^2.5.37$	750 = $2.3.5^3$	760 = $2^3.5.19$

Faktor 761-800

761	771 = 3.257	781 = 11.71	791 = 7.113
762 = 2.3.127	772 = $2^2.193$	782 = 2.17.23	792 = $2^3.3^2.11$
763 = 7.109	773	783 = $3^3.29$	793 = 13.61
764 = $2^2.191$	774 = $2.3^2.43$	784 = $2^4.7^2$	794 = 2.397
765 = $3^2.5.17$	775 = $5^2.31$	785 = 5.157	795 = 3.5.53
766 = 2.383	776 = $2^3.97$	786 = 2.3.131	796 = $2^2.199$
767 = 13.59	777 = 3.7.37	787	797
768 = $2^8.3$	778 = 2.389	788 = $2^2.197$	798 = 2.3.7.19
769	779 = 19.41	789 = 3.263	799 = 17.47
770 = 2.5.7.11	780 = $2^2.3.5.13$	790 = 2.5.79	800 = $2^5.5^2$

Faktor 801-840

801 = $3^2.89$	811	821	831 = 3.277
802 = 2.401	812 = $2^2.7.29$	822 = 2.3.137	832 = $2^6.13$
803 = 11.73	813 = 3.271	823	833 = $7^2.17$
804 = $2^2.3.67$	814 = 2.11.37	824 = $2^3.103$	834 = 2.3.139
805 = 5.7.23	815 = 5.163	825 = $3.5^2.11$	835 = 5.167
806 = 2.13.31	816 = $2^4.3.17$	826 = 2.7.59	836 = $2^2.11.19$
807 = 3.269	817 = 19.43	627	837 = $3^3.31$
808 = $2^3.101$	818 = 2.409	828 = $2^2.3^2.23$	838 = 2.419
809	819 = $3^2.7.13$	829	839
810 = $2.3^4.5$	820 = $2^2.5.41$	830 = 2.5.83	840 = $2^3.3.5.7$

Faktor 841-880

841 = 29^2	851 = 23.37	861 = 3.7.41	871 = 13.67
842 = 2.421	852 = $2^2.3.71$	862 = 2.431	872 = $2^3.109$
843 = 3.281	853	863	873 = $3^2.97$
844 = $2^2.211$	854 = 2.7.61	864 = $2^5.3^3$	874 = 2.19.23
845 = 5.13^2	855 = $3^2.5.19$	865 = 5.173	875 = $5^3.7$
846 = $2.3^2.47$	856 = $2^3.107$	866 = 2.433	876 = $2^2.3.73$
847 = 7.11^2	857	867 = 3.17^2	877
848 = $2^4.53$	858 = 2.3.11.13	868 = $2^2.7.31$	878 = 2.439
849 = 3.283	859	869 = 11.79	879 = 3.293
850 = $2.5^2.17$	860 = $2^2.5.43$	870 = 2.3.5.29	880 = $2^4.5.11$

Faktor 881-920

881	891 = $3^4.11$	901 = 17.53	911
882 = $2.3^2.7^2$	892 = $2^2.223$	902 = 2.11.41	912 = $2^4.3.19$
883	893 = 19.47	903 = 3.7.43	913 = 11.83
884 = $2^2.13.17$	894 = 2.3.149	904 = $2^3.113$	914 = 2.457
885 = 3.5.59	895 = 5.179	905 = 5.181	915 = 3.5.61
886 = 2.443	896 = $2^7.7$	906 = 2.3.151	916 = $2^2.229$
887	897 = 3.13.23	907	917 = 7.131
888 = $2^3.3.37$	898 = 2.449	908 = $2^2.227$	918 = $2.3^3.17$
889 = 7.127	899 = 29.31	909 = $3^2.101$	919
890 = 2.5.89	900 = $2^2.3^2.5^2$	910 = 2.5.7.13	920 = $2^3.5.23$

Faktor 921-960

921 = 3.307	931 = $7^2.19$	941	951 = 3.317
922 = 2.461	932 = $2^2.233$	942 = 2.3.157	952 = $2^3.7.17$

923 = 13.71	933 = 3.311	943 = 23.41	953
924 = $2^2.3.7.11$	934 = 2.467	944 = $2^4.59$	954 = $2.3^2.53$
925 = $5^2.37$	935 = 5.11.17	945 = $3^3.5.7$	955 = 5.191
926 = 2.463	936 = $2^3.3^2.13$	946 = 2.11.43	956 = $2^2.239$
927 = $3^2.103$	937	947	957 = 3.11.29
928 = $2^5.29$	938 = 2.7.67	948 = $2^2.3.79$	958 = 2.479
929	939 = 3.313	949 = 13.73	959 = 7.137
930 = 2.3.5.31	940 = $2^2.5.47$	950 = $2.5^2.19$	960 = $2^6.3.5$

Faktor 961-1000

961 = 31^2	971	981 = $3^2.109$	991
962 = 2.13.37	972 = $2^2.3^5$	982 = 2.491	992 = $2^5.31$
963 = $3^2.107$	973 = 7.139	983	993 = 3.331
964 = $2^2.241$	974 = 2.487	984 = $2^3.3.41$	994 = 2.7.71
965 = 5.193	975 = $3.5^2.13$	985 = 5.197	995 = 5.199
966 = 2.3.7.23	976 = $2^4.61$	986 = 2.17.29	996 = $2^2.3.83$
967	977	987 = 3.7.47	997
968 = $2^3.11^2$	978 = 2.3.163	988 = $2^2.13.19$	998 = 2.499
969 = 3.17.19	979 = 11.89	989 = 23.43	999 = $3^3.37$
970 = 2.5.97	980 = $2^2.5.7^2$	990 = $2.3^2.5.11$	1000 = $2^3.5^3$

DAFTAR PUSTAKA

1. Andreescu, Titu, Zuming Feng. 2004. *Path to Combinatorics for Undergraduates:Counthing Strategies*. Boston: Birkhauser.
2. Aziz, Abdul, Muhammad Son Muslimin. 2011. *Kupas Tuntas Olimpiade matematika SMA*. Yogyakarta: ANDI.
3. Beiler, Albert H. 1964. *Recreations in the Theory of Numbers*$(2^{nd}\ ed.)$. New York: Dover Publications.
4. Bintari, Nikenasih. 2009. *Master Juara Olimpiade Matematika SMA : Nasional dan Internasional*. Yogyakarta: Pustaka Widyatama.
5. Bintari, Nikenasih, Dedi Gunarto. 2007. *Panduan Menguasai Soal-Soal Olimpiade Matematika Nasional dan Internasional*. Yogyakarta: Indonesia Cerdas.
6. Budhi, Wono Setya. 2003. *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika*. Jakarta: Ricardo.
7. Budi, Wono setya. 2010. *Bahan Ajar Persiapan Menuju Olimpiade Sains Nasional/Internasional SMA: Matematika 5*. Jakarta : CV Zamrud Kemala.
8. Claude, Irwin P, Charles Wilber Leigh. 1934. *Plane and Sperical Trigonometry* $(4^{th}\ ed.)$. New York and London: McGRAW-HILL COMPANY.
9. Faires, Douglas J. 2009. *Langkah Pertama Menuju Olimpiade Matematika : Menggunakan Kompetisi Amerika(terj).* Bandung : Pakar Raya.
10. Hermanto, Eddy. 2010. *Diktat pembinaan olimpiade Matematika Tahun Pelajaran 2010-2011 SMA Negeri 5*. Bengkulu.
11. Kolman, Bernard, Robert C. Busby and Sharon Ross. 1996. *Discrete Mathematical Structures* $(3^{th}\ ed.)$. Ner Jersey: PRENTICE HALL.
12. Kumpulan soal Program Pembinaan kompetensi siswa.2007. Tim Matematika ITB.
13. Mutadi. 2008. *Bergelut dengan Si Asyik Matematika*. Kudus: PT. Listafariska Putra.
14. Polyanin, Andrew D, Alexander V. Manzhirov. 2007. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientist*. New York: Chapman & Hall / CRC.
15. Rasiman. Diktat Geometri. FPMIPA IKIP PGRI Semarang.

16. Rao, G. Shanker. 2009. *Discrete Mathematical Structures* $(2^{th}\ ed.)$. New Delhi: NEW AGE INTERNATIONAL (P) LIMITED, PUBLISHERS.
17. Sembiring, Suwah. 2002. *Olimpiade Matematika untuk SMU*. Bandung: Yrama Widya.
18. Sierpinski, Waclaw. 1964. *A Selected of Problems in the Theory of Numbers*. New York: THE MACMILLAN COMPANY.
19. Sobirin. 2006. Kompas Matematika : *Strategi Praktis Menguasai Tes Matematika(SMA Kelas 2 IPA)*. Jakarta: Kawan Pustaka.
20. Tampomas, Husein. 1999. *Seribu Pena Matematika SMU Kelas 2*. Jakarta: Erlangga.
21. Tim MGMD Matematika SMK EKs-Karesidenan Semarang. 2006. *Panduan Belajar Matematika Sekolah Menengah Kejuruan (SMK) Kelompok Teknologi 1 Tingkat 1 Semester 2.*
22. Tim PPPGT Matematika STM. 1996. *Panduan Persiapan EBTANAS*. Bandung : Departemen Pendidikan Dan Kebudayaan.
23. Tung, Khoe Yao. 2008. *Memahami Teori bilangan dengan Mudah dan Menarik*. Jakarta: Grasindo.
24. Wajik S, Jero, Suardhana Linggih dan Yose Rizal Syahrudin. 1981*. Ringkasan Matematika IPA*. Bandung: Ganeca Exact.
25. Wirodikromo, sartono, Dedi D Wandyagiri. 1994. *Matematika untuk SMA kurikulum 1984 GBPP 1988 Semester 6(cetakan ketujuh).* Jakarta: Erlangga.
26. Wiworo. 2009. *Diklat Instruktur Pengembang Matematika SMA Jenjang Lanjut:OSN Matematika SMA*. Yogyakarta.
27. Yohanes, S. Raditya Panji. 2008. *Mahir Olimpiade Matematika SMA*. Jakarta: Kendi Mas Media.
28. Yudi HS, 1993. *Rumus-Rumus Rahasia Fisika Praktis SMU*. Yogyakarta: BSA.
29. Kumpulan soal dari dalam dan luar negeri

SUMBER INTERNET

1. http://en.wikipedia.org/wiki/prime_number 19 januari 2013

2. http://himatika.unnes.ac.id/wp-content/uploads/2010/08/Soal-dan-Pembahasan-MCSHS-Babak-Penyisihan.pdf
3. http://mathtoday.wordpress.com/ diakses 27 Juni 2012
4. http://mhs.blog.ui.ac.id/afif.akbar11/wp-content/blogs.dir/14106/files/2012/03/Relasi-Rekurensi.pdf diakses 14 Maret 2013
5. http://mhs.blog.ui.ac.id/afif.akbar11/wp-content/blogs.dir/14106/files/2012/03/Solusi-Relasi-Rekurensi.pdf diakses 16 maret 2013
6. http://rosapaulina.wordpress.com/ diakses 01 Juli 2012
7. http://www.google.comurlsa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=84&ved=0CEsQFjADOVA&url=http%3A%2FMatheu_vol2_engl.rtf&ei=Bo0JUbepIKWQiAfZloGwCw&usg=AFQjCNFQ1lM5WOc7Yj4QdOa9T6NWxSNoAA&sig2=BojHl8i4kRWJ3KI3oww7Lw&bvm=bv.41642243,d.a diakses 31 Januari 2013
8. http://server.math.uoc.gr/~tzanakis/Courses/NumberTheory/MathInduction.pdf diakses 06 Februari 2013
9. http://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=16&ved=0CFsQFjAFOAo&url=http%3A%2F%2Fcs.nju.edu.cn%2Falgorithm%2Fslides%2F03.pdf&ei=Qj8kUfONMMWNrgfCs4HwAQ&usg=AFQjCNEUpgap4H9dHH6SP5q6YCiClxTOtA&sig2=fWgskWMglOTkcUWw3DIHoQ&bvm=bv.42661473,d.bmk diakses 20 Februari 2013

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Ahmad Thohir lahir di desa Manggar Wetan, kec. Godong, kab. Grobogan, Jawa Tengah pada tanggal 02 Februari 1980. Penulis menamatkan pendidikan dasar di MI Nahdlatut Thullab dan melanjutkan ke MTs Nahdlatut Thullab di desa Manggar Wetan lulus pada tahun 1993 dan 1996. Untuk pendidikan tingkat SMA, penulis menyelesaikannya di MA Futuhiyyah 02 Mranggen Demak pada tahun1999. Kemudian penulis menamatkan pendidikan S1 di IKIP PGRI Semarang jurusan Pendidikan Matematika masuk tahun 2000 dan lulus tahun 2004.

Saat ini penulis bekerja sebagai guru PNS (DPK) Kemenag Grobogan di MA Futuhiyah Jeketro mulai 01 September 2009 sampai sekarang, sebelumnya penulis juga pernah mengajar sebagai GTT di MTs Miftahul Mubtadiin Tambakan Gubug tahun 2003 – 2005 dan di SMK Negeri 3 Semarang tahun 2005 – 2009.

001

002

MA FUTUHIYAH JEKETRO